

ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΧΑΪΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ Ε.Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΙΣ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ · ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑ 1993

Εάν γνήσιον αὐτῷτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως

Ἀπαγορεύεται ἡ ἀνατύπωσις ἢ μετάφρασις τοῦ παρόντος ἢ καὶ
μέρους αὐτοῦ ἄνευ ἐγγράφου ἀδείας τοῦ συγγραφέως.

Copyright 1977 by J.Th.Haïnis Printed in Athens, Greece.

All rights reserved, Edition 1993

This book or any part thereof must not be reproduced in any form
without the written permission of the author

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Με τήν ἔνδοσιν τοῦ Τρίτου Τόμου πιστεύομεν ὅτι καλύπτομεν τήν διδαιτέαν ὑπὲρ τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν διὰ τὰς Ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

Κατεβλήθη, ὅσο ἦτο δυνατόν, ἰδιαίτερα προσπάθεια διὰ τήν ὅλην δομήν τοῦ βιβλίου, ὥστε τοῦτο νά ἔχη ἀπόψεις καί πρὸς τὰ Ἐφαρμοσμένα Μαθηματικά, καδ' ὅσον ἀπευθύνεται κατὰ κύριον λόγον πρὸς σπουδαστὰς Τεχνολογικοῦ Ἰδρυμάτος. Ἐξάλλου τό ἀνωτέρω διαφαίνεται σαφῶς καί ἐν τοῦ περιεχομένου τοῦ βιβλίου.

Ἰδιαίτεράν ἔμφασιν ἐδώσαμεν εἰς τήν σύμμορφον ἀπειριόσεις καδῶς καί εἰς τὰς ἐφαρμογὰς αὐτῆς εἰς τήν Δυναμικὴν τῶν ρευστῶν, τήν θερμότητα καί τὸν Στατικὸν ἡλεκτρισμόν.

Θερμὰς εὐχαριστίας ἐμφράζω πρὸς τοὺς Ἐπικ. Καθηγητὰς κ.κ. Καρανάσιον Σωτήριον, Βλασσόπουλον Βασίλειον, Φελλούρην Ἀργύριον καί τὸν βοηθόν κ. Βεληθάσην Νίλ. διὰ τὰς γενικὰς παρατηρήσεις των ἐπὶ τοῦ κειμένου.

Ἀθῆναι Φεβρουάριος 1993

ΙΩΑΝΝΗΣ Θ. ΧΑΪΝΗΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I: ΘΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

| | <u>ΣΕΛΙΣ</u> |
|--|--------------|
| § 1. Τό μιγαδιόν επίπεδον..... | 13 |
| § 2. Βασικαί τοπολογικαί γνώσεις..... | 15 |
| § 3. Άνοιουδαί μιγαδιών αριθμών..... | 18 |
| § 4. Ἡ έννοια τῆς συναρτήσεως..... | 23 |
| § 5. Ὁρια καί συνέχεια συναρτήσεων μιᾶς μιγαδιῆς μεταβλητῆς..... | 25 |
| § 6. Περὶ τῆς συνεχείας τοῦ πρωτεύοντος ὀρίσματος $\arg z$ | 30 |
| § 7. Ἀντίστροφαι συναρτήσεις..... | 32 |
| Συμπληρώματα καί άσκήσεις..... | 32 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II: ΣΕΙΡΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

| | |
|--|----|
| § 1. Κριτήριον συγκλίσεως σειρών..... | 34 |
| § 2. Δυναμοσειραί, Συναρτήσεις ὀρισόμεναι δι' αὐτῶν..... | 38 |
| § 3. Ἡ ένδεικτικῆ συνάρτησις e^z | 41 |
| § 4. Αἱ τριγωνομετρικαί καί ὑπερβολικαί συναρτήσεις..... | 43 |
| § 5. Ἡ λογαριθμικῆ συνάρτησις $\log w$ | 44 |
| Συμπληρώματα καί άσκήσεις..... | 45 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III: ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

| | |
|---|----|
| § 1. Παράγωγος μιγαδιῆς συναρτήσεως..... | 47 |
| § 2. Διαφορικόν μιγαδιῆς συναρτήσεως..... | 50 |
| § 3. Αἱ συνθήκαι τῶν Cauchy-Riemann..... | 50 |
| § 4. Συζυγεῖς συναρτήσεις..... | 54 |
| § 5. Αἱ συνθήκαι τῶν Cauchy-Riemann ὑπό ποδινῆν μορφήν..... | 55 |
| § 6. Οἱ διαφορικοί τελεστοί..... | 58 |

| | | |
|------|--|----|
| § 7. | Κανών $L'hospital$ | 60 |
| § 8. | Καμπύλαι του Jordan - Έφαπτομενιόν διάνυσμα..... | 61 |
| | Συμπληρώματα και άσυνήσεις..... | 62 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV. ΠΛΕΥΣΤΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΙΔΙΑΙΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

| | | |
|------|--|----|
| § 1. | Πεδίον όπου μία συνάρτησις είναι αναλυτική και άπλη..... | 65 |
| § 2. | Η συνάρτησις $w=z^n$ και η αντίστροφός της $z=\sqrt[n]{w}$ | 66 |
| § 3. | Η συνάρτησις $w=e^z$ και η αντίστροφός της $z=\log w$ | 70 |
| § 4. | Αί συναρτήσεις z^a και z^a | 73 |
| § 5. | Αί αντίστροφοι υπερβολικοί συναρτήσεις..... | 74 |
| | I. Η συνάρτησις $\coth w$ | 74 |
| | II. Η συνάρτησις $\tanh w$ | 75 |
| | III. Η συνάρτησις $\coth w$ | 75 |
| § 6. | Αί αντίστροφοι υπερβολικοί συναρτήσεις..... | 76 |
| § 7. | Επιφάνεια του Riemann..... | 78 |
| § 8. | Ιδιόζοντα σημεία μίας συναρτήσεως..... | 79 |
| | I. Όμαλά σημεία..... | 79 |
| | II. Μηδενίζοντα σημεία..... | 79 |
| | III. Πόλοι..... | 80 |
| | IV. Ουσιώδη άνώμαλα σημεία..... | 81 |
| | V. Μεμονωμένα ιδιόζοντα σημεία..... | 81 |
| | VI. Αίρομένη άνωμαλία..... | 82 |
| | VII. Άνωμαλία εις τό άπειρον..... | 82 |
| | VIII. Κλάδινα σημεία..... | 82 |
| | Συμπληρώματα και άσυνήσεις..... | 84 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V: ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

| | | |
|------|---|----|
| § 1. | Ο μετασχηματισμός $w=\frac{az+b}{cz+d}$ | 86 |
| § 2. | Είδιαι περιπτώσεις μετασχηματισμών..... | 87 |

| | |
|---|-----|
| I. Παράλληλος μεταφορά $w=z+b$ | 87 |
| II. Αντιστροφή $w=1/z$ | 87 |
| III. Περιστροφή $w=a \cdot z, a \in \mathbb{C}$ | 89 |
| IV. Γραμμικός μετασχηματισμός..... | 89 |
| § 3. Περί του διπλού λόγου..... | 90 |
| § 4. Ειδικοί τύποι μετασχηματισμών..... | 94 |
| § 5. Διάφοροι εφαρμογαι..... | 96 |
| § 6. Περί συμμετρίας ή υατοπτρισμού..... | 99 |
| Συμπληρώματα και άσκήσεις..... | 103 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI: ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

| | |
|---|-----|
| § 1. Βασικαί γνώσεις..... | 106 |
| § 2. Θεώρημα των Cauchy-Goursat περί ολοκληρώσεως αναλυτικῶν συναρτήσεων..... | 111 |
| § 3. Ολοκληρωτικοί τύποι του Cauchy..... | 121 |
| § 4. Θεωρήματα απορρέοντα ἐκ του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy..... | 125 |
| § 5. Αρχή του μεγίστου και ελάχιστου μέτρου μιᾶς αναλυτικῆς συναρτήσεως..... | 128 |
| § 6. Εφαρμογαι τῆς αρχῆς του μεγίστου και ελάχιστου μέτρου εἰς τὰς ἁρμονικὰς συναρτήσεις..... | 130 |
| Συμπληρώματα και άσκήσεις..... | 132 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII: ΣΕΙΡΑΙ TAYLOR ΚΑΙ LAURENT

| | |
|---|-----|
| § 1. Σειραι Taylor..... | 136 |
| § 2. Σειραι του Laurent..... | 140 |
| § 3. Ταξινόμησις των μεμονωμένων ιδιαιδόντων σημείων μιᾶς μονοτιμου αναλυτικῆς συναρτήσεως..... | 144 |
| § 4. Όμαλή σύγκλισις σειρών..... | 147 |
| § 5. Περί αναλυτικῆς ἐπευτάσεως..... | 153 |
| Συμπληρώματα και άσκήσεις..... | 161 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII: ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ (RESIDUES)

| | | |
|------|---|-----|
| § 1. | Τό ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εἰς ἓνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον αὐτῆς..... | 168 |
| § 2. | Θεώρημα τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων..... | 172 |
| § 3. | Υπολογισμός ὠρισμένων ὁλοκληρωμάτων μέ τήν βοήθειαν τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων..... | 174 |
| § 4. | Λογαριθμικόν ὁλοκληρωτικόν ὑπόλοιπον καί ἀρχή τοῦ ὁρίσματος..... | 188 |
| § 5. | Θεώρημα τοῦ Rouché καί ἐφαρμογαί αὐτοῦ..... | 190 |
| | Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις..... | 192 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX: ΜΕΡΟΜΟΡΦΟΙ ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

| | | |
|------|---|-----|
| § 1. | Μερόμορφοι συναρτήσεις..... | 197 |
| § 2. | Ἀνάλυσις μερικῶν κυκλικῶν συναρτήσεων εἰς μερικὰ γινώσματα μέ τήν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Mittag-Leffler..... | 200 |
| § 3. | Ἀπειρογινόμενα..... | 204 |
| § 4. | Ἀκέραιαι συναρτήσεις..... | 210 |
| § 5. | Ἀνάλυσις μιᾶς ἀκεραίας συναρτήσεως σέ ἓνα ἀπειρογινόμενο..... | 213 |
| § 6. | Παραγοντοποίησις τῆς $f(z) = \eta \mu \pi z$ | 217 |
| § 7. | Ἡ συνάρτησις Γ | 219 |
| § 8. | Ἡ συνάρτησις Γ ὑπό μορφήν γενικευμένου ὁλοκληρώματος..... | 224 |
| | Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις..... | 228 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X: ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΗΣ

| | | |
|------|--|-----|
| § 1. | Σύμμορφος ἀπεικονίσις..... | 232 |
| § 2. | Ἰδιότητες τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως..... | 235 |
| § 3. | Μελέτη διαφόρων συμμόρφων ἀπεικονίσεων..... | 237 |
| § 4. | Ὁ μετασχηματισμός τῶν Schwartz-Christoffel..... | 239 |
| § 5. | Μετασχηματισμός τῶν συνόρων ὑπό παραμετρικὴν μορφήν..... | 255 |
| | Πίναξ μετασχηματισμῶν χωρίων ὑπό συμμόρφου ἀπεικονίσεως..... | 256 |
| | Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις..... | 261 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI: ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET **ΣΕΛΙΣ**

| | | |
|------|-----------------------------------|-----|
| § 1. | Τύπος τῶν Schwartz- Poisson | 269 |
| | I. Τύπος τοῦ Schwartz | 269 |
| | II. Τύπος τοῦ Poisson | 271 |
| § 2. | Τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet | 271 |
| | Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις | 278 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII: ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΦΥΣΙΚΗΝ

| | | |
|------|--|-----|
| § 1. | Ἐφαρμογαὶ εἰς τὴν ροτὴν τῶν ρευστῶν | 283 |
| § 2. | Ἡ ροτὴ περὶ ἑνὸς ἀντικειμένου - Θεώρημα τοῦ Blassius | 291 |
| § 3. | Στατικὸς ἡλεκτρισμὸς | 298 |
| | I. Ἡλεκτρικὸν πεδίου | 298 |
| | II. Μιχαδίου ἡλεκτροστατικὸν δυναμιόν | 299 |
| | III. Θεώρημα Gauss | 300 |
| | IV. Μιχαδίου δυναμιόν ὀφειλόμενον εἰς ἡλεκτρικὸν φορτίον | 302 |
| § 4. | Μετάδοσις θερμότητος | 308 |
| | Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις | 311 |

ΜΕΡΟΣ Α'

ΘΕΩΡΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι¹⁾

ΟΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

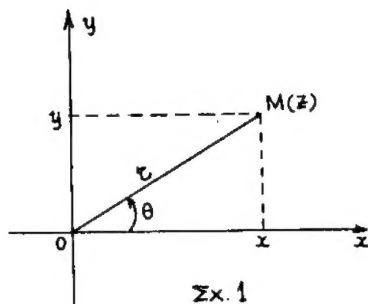
§1. ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

Ένας μιγαδικός αριθμός z δύναται να γραφεί υπό την αλγεβρική μορφήν:

$$z = x + iy \quad (1)$$

όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί και $i = \sqrt{-1}$.

Η γεωμετρική του παράσταση εις το μιγαδικόν επίπεδον επιτυγχάνεται θεωρούντες τό σημείον M έχον ὀρθογώνιους συντεταγμένους x και y . Η ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου και τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος και κατὰ συνέπειαν καθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς δά παριστᾷ ἓνα σημεῖον τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου και ἀντιστρόφως.



Εἰσάγοντες πολικὰς συντεταγμένους (r, θ) μέ πόλιν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων και πολικὸν ἄξονα τὸν ἄξονα τῶν x , δά ἔχωμεν:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2)$$

και οὕτω ἡ ἀλγεβρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z γράφεται υπό τὴν λεγομένην πολικὴν μορφήν αὐτοῦ ἥτοι:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (3),$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ἐάν $r \neq 0$, τότε δά ἔχωμεν:

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (4)$$

Ὁ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς r καλεῖται μέτρον ἢ ἀπόλυτος τιμὴ και συμβολίζεται με $|z|$, ὁ δὲ ἀριθμὸς θ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὰς ἐξισώσεις (4) καλεῖται ὄρισμα τοῦ z και συμβολίζεται με $\arg z = \theta$.

1) Τὰς πρώτας §§ τοῦ παρόντος κεφαλαίου τὰς διαπραγματεύμεθα ἐν τάχει.

Πραφανώς διά τό μέτρον ἤ τιν ἀπόλυτον τιμή του z ἔχομεν:

$$z^2 = |z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z \cdot \bar{z}$$

Συνεπώς :

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}, \text{ ὅπου } \bar{z} = x-iy, \text{ συζυγῆς τοῦ } z$$

- Τό ὄρισμα τό διδόμενον ὑπό τῶν (4) προσδιορίζεται κατὰ ἓνα πολλαπλάσιον τοῦ 2π . Ἡ τιμή τοῦ ὀρίσματος πού ἱκανοποιεῖ τήν διπλήν ἀνισότητα

$$-\pi < \theta \leq \pi \quad (5)$$

υαλεῖται **πρωτεύον ὄρισμα**.

Τό ὄρισμα τοῦ ἀριθμοῦ μηδέν δέν δύναται νά ὀρισθῇ. Ἀποδεικνύεται ὅτι:

- $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$, ἐάν $-\pi < \arg z_1 + \arg z_2 < +\pi$.
 - Ἐάν $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n \neq 0$ τότε $\arg(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n + 2k\pi$; k ἀνέραιον
 - $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.
- Αἱ ιδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν καί διά τοὺς μιγαδικούς ἀριθμούς ἥτοι:

$$i) \quad |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$ii) \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$iii) \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

- Διά τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ἔχομεν:

$$i) \quad [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (\text{Τύπος De Moivre})$$

$$ii) \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}), k=0,1,2,\dots,n-1$$

- Συνήθως γράφομεν $x = \operatorname{Re} z$ καί $y = \operatorname{Im} z$, ὅτε ὁ μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει τήν μορφήν (1) γράφεται: $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$

$$\text{Προφανώς: } |\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|, |z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

$$\text{Εἶναι δέ, } \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Άσκῆσεις:

1. Νά εὑρεθῶν αἱ τιμαί τοῦ z διά τὰς ὁποίας ἔχομεν: $z^5 = -32$. Ἐν συνεχείᾳ δώσατε γεωμετρικὴν ἐρμηνείαν τῶν ριζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξίσωσως.
2. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ κατωθι ριζαί:

$$i) (1-i)^{1/2} \quad ii) (-1+i)^{1/3} \quad iii) (1-i)^{1/4}$$

3. Να λυθῇ ἡ ἑξίσωσις $az^2+bz+c=0$, $a \neq 0$ καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐφαρμόσετε τὸ ἀποτέλεσμα εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἑξίσωσις: $z^2+(i+2)z+3-i=0$.

(Ἀπάντ. Αἱ ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἑξίσωσις δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

§ 2 ΒΑΣΙΚΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

Κατωτέρω θὰ δώσωμεν, λίαν συντόμως, ὠρισμένας βασικὰς τοπολογικὰς ἐννοίας τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου \mathbb{C} .

1. Περιοχαί. Καλοῦμεν *περιοχήν* ἢ ἀκριβέστερον *ε-περιοχήν* τοῦ σημείου $z_0 \in \mathbb{C}$ τὸ σύνολον τῶν σημείων z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν ἀνισότητα $|z - z_0| < \varepsilon$, ὅπου ε δοθεὶς θετικὸς ἀριθμὸς. Τὸ σύνολον $\{z: |z - z_0| < \varepsilon\}$ καλεῖται *ἀνοικτὸς δίσκος* κέντρου z_0 καὶ ἀκτίνας ε .
2. Ὁριαῖά σημεία. Ἐνα σημεῖον z_0 καλεῖται *ὀριαῖόν σημεῖον* ἢ *σημεῖον συσσωρεύσεως* ἑνὸς ὑποσυνόλου S τοῦ \mathbb{C} , ἐὰν καθε ε -περιοχή τοῦ z_0 περιέχῃ ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ S διάφορον τοῦ z_0 . Εὐνόλως διαπιστωταί ὅτι, ἐὰν καθε ε -περιοχή περιέχῃ ἕνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ S ($\neq z_0$), τότε θὰ περιέχῃ καὶ ἄπειρα σημεία αὐτοῦ. Ἄς σημειωθῇ ὅτι τὸ z_0 δύναται ἢ ὄχι ν' ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον S .
3. Κλειστά σύνολα. Ἐνα σύνολον S καλεῖται *κλειστόν*, ἐὰν καθε ὀριαῖόν του σημεῖον ἀνήκῃ εἰς αὐτό. Π.χ. Τὸ σύνολον μὲ $|z - z_0| \leq R$, $R > 0$ εἶναι κλειστόν.
4. Φραγμένα σύνολα. Ἐνα ὑποσύνολον S τοῦ \mathbb{C} θὰ καλεῖται *φραγμένον*, ἐὰν δύναται νὰ εὑρεθῇ μία σταθερά $M > 0$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|z| < M$ διὰ καθε $z \in S$. Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ τοιαύτη σταθερά $M > 0$ πού νὰ πληροῦται ἡ ἀνωτέρω σχέση, τότε τὸ σύνολον καλεῖται *μὴ φραγμένον*. Ἐνα κλειστόν καὶ φραγμένον ὑποσύνολον τοῦ \mathbb{C} καλεῖται *συμπαγές*.
5. Ἐσωτερικά σημεία. Ἐνα σημεῖον z_0 καλεῖται *ἐσωτερικόν* ἑνὸς συνόλου S , ἐὰν ὑπάρχῃ μία ε -περιοχή τοῦ z_0 πάντα τὰ σημεία τῆς ὁποῖ-

ας ανήκουν, εις τό S .

Π.χ. θεωρούμεν τό σύνολον $|z| \leq 1$. Ένα τυχόν σημείον z αὐτοῦ θά εἶναι ἐσωτερικόν, ἐάν εἶναι $|z| < 1$, ἐνῶ τά σημεία $z = \pm 1$ ἢ $z = \pm i$ ἢ γενικώς τά σημεία $|z| = 1$ δέν εἶναι ἐσωτερικά σημεία αὐτοῦ.

6. Σύνορον ενός συνόλου: Ἐάν καθε περιοχή τοῦ σημείου z_0 περιέχη σημεία ἀνήκοντα καί μή ἀνήκοντα εἰς τό σύνολον S , τότε θά λέγουμεν ὅτι τό z_0 εἶναι συνοριακόν σημείον τοῦ S . Τό σύνολον τῶν συνοριακῶν σημείων τοῦ S καλεῖται σύνορον αὐτοῦ.

Π.χ. τά σημεία τῆς περιφέρειας $|z| = 1$ ἀποτελοῦν τό σύνορον τοῦ συνόλου $|z| < 1$. Ὀμοίως τό σύνορον τοῦ συνόλου $|z| \leq 1$ εἶναι ἡ περιφέρεια $|z| = 1$.

7. Ἐξωτερικά σημεία. Ἐάν ἓνα σημείον δέν εἶναι ἐσωτερικόν ἢ συνοριακόν ενός συνόλου, τότε τοῦτο θά καλεῖται ἐξωτερικόν σημείον τοῦ συνόλου, ἢ ἰσοδυνάμως: Ἐνα σημείον θά εἶναι ἐξωτερικόν ενός συνόλου ἐάν ὑπάρχη μία περιοχή αὐτοῦ μή περιέχουσα ἐσωτερικά ἢ συνοριακά σημεία τοῦ συνόλου.

8. Ἀνοικτά σύνολα. Ἐνα σύνολον θά καλεῖται ἀνοικτόν, ἐάν τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπό τά ἐσωτερικά του σημεία καί μόνον αὐτά. Π.χ. τό σύνολον $|z| < 1$ εἶναι ἀνοικτόν.

9. Θήκη ενός συνόλου. Ἡ ἔνωσις τῶν σημείων ενός συνόλου S μετά τῶν συνοριακῶν του σημείων καλεῖται θήκη τοῦ συνόλου. Οὕτω, ἐάν παραστήσωμεν μέ \bar{S} τήν θήκη τοῦ S καί μέ Γ τό σύνορον αὐτοῦ, τότε θά ἔχωμεν ἐξ ὁρίσμου $\bar{S} = S \cup \Gamma$. Προφανῶς, ἐάν τό σύνολον S εἶναι κλειστόν, τότε $\Gamma \subset S$, ὅτε $\bar{S} = S$.

10. Ἀνοικτόν χωρίον ἢ πεδίου. Ἐνα σύνολον $G \subset \mathbb{C}$ καλεῖται ἀνοικτόν χωρίον ἢ πεδίου, ἐάν πληροῦνται αἱ κατωθι συνθήκαι: i) Κάθε ση-

μείον του G είναι έσωτεριών αυτού του συνόλου ii) Δύο σημεία του G δύνανται να ένωθούν διά μιᾶς πολυγωνιυῆς γραμμῆς πάντα τὰ σημεία τῆς ὁποίας ἀνήκουν ἐντός του G .

Δίδοντες τὸν ἀνωτέρω ὀρισμὸν τοῦ πεδίου ἡ δευτέρα συνθήκη εἶναι ἡ συνθήκη τῆς συνευτιμότητος τοῦ πεδίου.

Παραδείγματα 1%/ Τὸ σύνολον τῶν σημείων $|z| < 1$ ἀποτελεῖ ἓνα πεδίου.
2%/ Ἡ ε -περιοχὴ τοῦ σημείου z_0 , δηλ. ἡ $|z - z_0| < \varepsilon$ ἀποτελεῖ ἓνα πεδίου.
3%/ Τὸ σύνολον τῶν σημείων $|z - z_0| \leq 1$ δὲν ἀποτελεῖ πεδίου ἐπειδὴ πάντα τὰ σημεία δὲν εἶναι έσωτεριὰ 4%/ Τὸ σύνολον τῶν σημείων $|z| \neq 1$ δὲν ἀποτελεῖ πεδίου, διότι, δὲν πληροῦται ἡ δευτέρα συνθήκη. 5%/ Τὸ σύνολον τῶν σημείων $|z| < 1$ καὶ $|z - 4| < 2$ δὲν ἀποτελεῖ πεδίου.

11. **Κλειστὸν χωρίον.** Ἡ θήκη ἑνὸς ἀνοιυτοῦ χωρίου ἡ πεδίου καλεῖται κλειστὸν χωρίον. Π.χ. θεωροῦντες τὸ πεδίου $|z| < 1$ τὸ ἐξ αὐτοῦ κλειστὸν χωρίον εἶναι τὸ $|z| \leq 1$.

Χρησιμοποιοῦντες κατωτέρω τὴν λέξιν "χωρίον", ἄνευ ἐπιθέτου θὰ έννοοῦμεν ἀνοιυτὸν χωρίον ἡ πεδίου.

12. **Ἀπόστασις:** Ἡ ἀπόστασις $p(z_1, z_2)$ δύο σημείων z_1 καὶ z_2 τοῦ μιγαδίου ἐπιπέδου \mathbb{C} ὀρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$p(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Εὐνόλως διαπιστοῦται, ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσηις πράγματι ὀρίζει μίαν ἀπόστασιν.

13. **Τμήμα:** Ἐάν z_1, z_2 εἶναι δύο σημεία τοῦ \mathbb{C} , ὑπὸ τὸν ὀρου **τμήμα** $[z_1, z_2]$ έννοοῦμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς μορφῆς:

$$z = (1-t)z_1 + tz_2$$

ὅπου t πραγματιυὸς ἀριθμὸς καὶ $0 \leq t \leq 1$. Τὰ σημεία z_1, z_2 καλοῦνται **ἄκρα** τοῦ τμήματος $[z_1, z_2]$.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τὰ κατωθι βασικὰ θεωρήματα:

Θεώρημα I-2-1 (Weierstrass-Bolzano). Κάθε φραγμένον άπειροσύνολον έν \mathbb{C} έχει ένα τουλάχιστον όριαυόν σημείον.

Θεώρημα I-2-2 (Heine-Borel) Έστω ένα συμπαχές σύνολον \bar{G} . Υποθέτομεν ότι υπάρχει μία οίυογένεια άνοιγτων δίσκων, που καλύπτουν τό \bar{G} . Τότε τό \bar{G} δύναται νά καλυφθῇ υπό ενός πεπερασμένου άριθμοῦ έξ αυτών των δίσκων K_i , δηλ. υπάρχουν σημεία z_i , $1 \leq i \leq n$ τοῦ \bar{G} ώστε νά έχωμεν $\bar{G} \subset \bigcup_{i=1}^n K_{z_i}$.

Θεώρημα I-2-3 (Cantor. Αρχή τοῦ έγκυλωθισμοῦ). Εάν K_n , $n \geq 1$ είναι μία φθίνουσα άνολουθία συμπαγών καί διαφόρων τοῦ κενοῦ υποσυνόλων τοῦ G , τότε ἡ τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι ένα συμπαχές καί μή κενόν υποσύνολον τοῦ G .

§3. ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Είς τό κεφάλαιον VI τοῦ πρώτου τόμου έμελετήσαμεν τά άνολουθίας πραγματιων άριθμών καί ήσχολήθημεν κυρίως μέ διαφόρους ιδιότητες καί κριτήρια συγυλίσσεως αυτών. Είς τήν παρούσαν § δά άσχοληθώμεν μέ άνολουθίας μιγαδιων άριθμών.

Όρισμός 1-3-1. Μία άνολουθία $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ μιγαδιων άριθμών όρίζεται ως μία μονοσήμαντος αντιστοιχία τῆς μορφῆς:

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow z_n \in \mathbb{C}$$

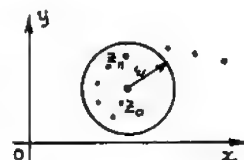
Τά σημεία (οί μιγαδιωοί άριθμοί) $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ καλοῦνται όροι τῆς άνολουθίας· είδιωότερον τό σημείον z_n καλεῖται n -στός ἢ γενικός όρος τῆς άνολουθίας $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Παντοῦ κατωτέρω μέ $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ἢ $\{z_n\}$, $n \geq 1$ ἢ απλώς μέ $\{z_n\}$ δά συμβολίζωμεν μίαν άνολουθίαν μιγαδιων άριθμών.

Όρισμός I-3-2. Λέγομεν ότι ἡ άνολουθία των μιγαδιων άριθμών $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ συγυλίνει πρός τόν μιγαδιόν άριθμόν z_0 , αλλως τείνει πρός τόν z_0 καί γράφομεν $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ ἢ $z_n \rightarrow z_0$, $n \uparrow +\infty$, τότε καί μόνον τότε, εάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει είς άέέραιος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ώστε διά $n > N(\varepsilon)$ νά ισχύη: $|z_n - z_0| < \varepsilon$.
Ό z_0 καλεῖται όριον ἢ όριαυόν σημείον τῆς $\{z_n\}$.

Συμφώνως πρός τ' άνωτέρω, ό z_0 δά είναι τό όριον τῆς άνολουθίας $\{z_n\}$, $n \geq 1$

Εάν κάθε περιοχή του z_0 περιέχει τελειώς πάντας τους όρους της ακολουθίας $\{z_n\}$.

Γεωμετρικώς αυτό σημαίνει, ότι όλα τα σημεία $z_n, n > N$ υείνται εἰς τὸ ἔσωτεριὸν ἑνὸς κύκλου κέντρου z_0 καὶ ἀκτίνος ε , ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ ἑναντι σχῆμα.



Ἐὰν $z_0 = 0$, τότε ἡ $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ καλεῖται μηδενιὴ ἀκολουθία. Οὕτω, π.χ., ἡ ἀκολουθία $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ εἶναι μία μηδενιὴ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν μία ἀκολουθία δὲν συγχλίνει ἐν \mathbb{C} , δὲ λέγωμεν ὅτι ἀποκλίνει.

Ὁρισμός I-3-3. Μία ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\{z_n\}, n \geq 1$ δὲ λέγωμεν ὅτι εἶναι ἀκολουθία τοῦ Cauchy ἢ βασικὴ ἀκολουθία, εἰς δὲ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη εἰς ἀμέριστος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε $|z_n - z_m| < \varepsilon$ διὰ $n, m > N(\varepsilon)$. ἢ ἰσοδυνάμως $|z_n - z_{n+k}| < \varepsilon$ διὰ $n > N(\varepsilon)$ καὶ $k = 1, 2, 3, \dots$

Ὁρισμός I-3-4. Μία ἀκολουθία $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ καλεῖται φραγμένη, ἀντιθέ-
στερον ἀπολύτως φραγμένη, τότε καὶ μόνου τότε, ἂν ὑπάρχη θετικὸς ἀ-
ριθμὸς M τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ νὰ ἰσχύη: $|z_n| \leq M$.

Γεωμετρικώς αυτό σημαίνει ὅτι πάντες οἱ ὅροι τῆς φραγμένης ἀκολουθίας $\{z_n\}$ υείνται ἐντὸς ἑνὸς κύκλου μέ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτίναν M .

Πρότασις I-3-1. Ἐὰν $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ εἶναι μία συγχλίνουσα ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ εἶναι φραγμένη.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Θεώρημα I-3-1. (Bolzano-Weierstrass). Κάθε φραγμένη ἀκολουθία $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἕνα τουλάχιστον ὁρισμὸν σημεῖον.

• Ὁ ὁρισμὸς τῆς συγχλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας μέ μιγαδικούς ὅρους εἶναι «τυ-
πικῶς» ὁ αὐτός ὅπως καὶ δι' ἀκολουθίας μέ πραγματικούς ὅρους. Ἐπομένως
οἱ γνωστοὶ κανόνες ὑπολογισμοῦ τῶν ὁρίων διὰ πραγματικῆς ἀκολουθίας ἰσχύ-
ουν καὶ ἐνταῦθα, ἥτοι:

Ἐὰν, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ καὶ $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$, τότε ἰσχύουν:

$$\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

- β) $\lim_{n \rightarrow \infty} k z_n = k z_0 = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, όπου k τυχών σταθερός μιγαδ. αριθμός.
 γ) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z_0 \cdot w_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.
 δ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}$, όταν $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0 \neq 0$, $w_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση I-3-2. Εάν $z_n = x_n + i y_n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι μία ακολουθία μιγαδίων αριθμών και $z_0 = x_0 + i y_0$, τότε οι κάτωθι προτάσεις είναι ισοδύναμοι:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$
 ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$

Απόδειξις: i) \Rightarrow ii). Έστω ότι η ακολουθία $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ έχει όριον τό z_0 , τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν I-3-3 ἔχομεν διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n > N$ νὰ ἔχωμεν: $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

Ἀλλά: $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$ καὶ ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὰς σχέσεις.

$$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leq |z_n - z_0| \quad (1)$$

καὶ $|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \quad (2)$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon, \quad |y_n - y_0| \leq |z_n - z_0| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } n > N.$$

ἥτοι: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ καὶ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

ii) \Rightarrow i). Έστω $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ καὶ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, τότε διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n > N$ νὰ ἔχωμεν:

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

Τότε ὁμως, λόγω καὶ τῆς (2) ἔχομεν:

$$|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } n > N,$$

ἥτοι: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$.

Πρόταση I-3-3 (Κριτήριον τοῦ Cauchy). «Να μία ακολουθία $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συγχλίνουσα, πρέπει καὶ ἀρμεῖ αὕτη νὰ είναι μία ακολουθία τοῦ Cauchy (βασιυή ακολουθία).

Απόδειξις: Τό ὅτι πᾶσα συγχλίνουσα ακολουθία μιγαδίων αριθμῶν είναι

βασική, έπεται έυ τής προηγουμένης προτάσεως καί τού κριτηρίου τού Cauchy δι' ακολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν (βλ. Θεώρημα VIII-2-1, Τόμος I, σελίς 232).

Ἀντιστρόφως Ἐστω $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ μία ακολουθία Cauchy (βασική ακολουθία) μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπου $z_n = x_n + i y_n$. ($n=1, 2, \dots$). Τότε συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμον I-3-3, ἔχομεν: διὰ τὰδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕνας ἀνέριαιος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ τὰδε $n > N$ καί $m > N$ νά ἰσχύη:

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad (1)$$

Ἐχομεν ὁμῶς:

$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \quad \text{καί} \quad |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$$

ὁπότε, λόγω τής (1) λαμβάνομεν:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{καί} \quad |y_n - y_m| < \varepsilon$$

διὰ τὰδε $n > N$ καί $m > N$, ἥτοι αἱ $\{x_n\}, n \in \mathbb{N}$, $\{y_n\}, n \in \mathbb{N}$ εἶναι ακολουθίαι Cauchy πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ὡς τοιαῦται συγχλίνουν, ἔστω δέ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ καί $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.

Τότε ὁμῶς, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν I-1-2, ἡ ακολουθία $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ συγχλίνει εἰς τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $z_0 = x_0 + i y_0$.

Τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον (∞) τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου.

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν ακολουθίαν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $\{z_n\}, n \geq 1$ τοιαύτη, ὥστε διὰ τὰδε θετικὸν ἀριθμὸν $M > 0$ νά ὑπάρχη ἕνας ἀνέριαιος N τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν $|z_n| > M$ διὰ $n \geq N$. Αὕτῃ ἡ εἰδικὴ περίπτωσις τής ἀπολύτως αὐξουσας ἄνευ φράγματος ακολουθίας δημιουργεῖ ὠρισμένας δυσχερείας. Ἀπαλλθασσόμεθα ἀπὸ αὐτάς τὰς δυσχερείας διὰ τής εἰσαγωγῆς τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \infty$. Ὑποθέτοντες ὅτι τὰδε ἄνευ φράγματος ἀπολύτως αὐξουσὰ καὶ διὰ συγχλίνει πρὸς τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν ∞ , διὰ τὸν ὁποῖον λέγομεν εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον ὅτι ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτοῦ.

Οὕτω εἰσάγεται καί ἡ ἔννοια τοῦ ἐπευτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἀποτελουμένου ἀπὸ τὸ σύνθεδες μιγαδικὸν ἐπίπεδον καί ἑνός εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν σημείου (δηλ. τὸ σημεῖον $z = \infty$).

Ἄς σημειωθῇ ὅτι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς ∞ δὲν εἶναι ὠρισμένος ἐπειδὴ τὸ

πραγματιών και τό φανταστικόν μέρος αὐτοῦ δέν εἶναι ὠρισμένα. Ἐπὶ πλεόν οἱ ὅροι μιᾶς ἀπολύτως αὐξουσῆς ἀμολοουδίας τείνουν πρό τό ∞ ἀνεξαρτήτως τῆς διευθύνσεως εἰς τό ἐπευτεταμένον μιχαδιών ἐπίπεδον.

Ἐάν μία ἀμολοουδία $\{z_n\}$ $n \geq 1$ συγυλίνει πρός τό μηδέν, τότε ἡ ἀμολοουδία $z_n = \frac{1}{z_n}$ θά συγυλίνη πρός τό ∞ .

Διά τόν μιχαδιών ἀριθμόν ∞ δεχόμεθα ὅτι:

$\frac{1}{0} = \infty$ καί $\frac{1}{\infty} = 0$, $|\infty| = \infty$, $z \cdot \infty = \infty$ ἐάν εἶναι $z \neq 0$, $z \pm \infty = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$ διὰ $z \neq \infty$, $\frac{\infty}{z} = \infty$ διὰ $z \neq 0$, καί $z \cdot \infty = \infty$ διὰ $z \neq 0$.

Ἡ πρᾶξις $\frac{\infty}{\infty}$ εἶναι ἀπροσδιόριστος μορφή. Ἄς σημειωθῇ ὅτι τό ∞ στερεῖται προσήμου.

Ὁρισμός I-3-5 Θά λέγωμεν ὅτι μία ἀμολοουδία μιχαδιῶν ἀριθμῶν $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ἔχει ὅριον τό ∞ καί θά γράψωμεν $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ἢ $z_n \rightarrow \infty$, τότε καί μόνον τότε, ἂν διὰ καθε πραγματικόν ἀριθμόν A ὑπάρχει ἀριθμός $N = N(A)$ τοιοῦτος, ὥστε:

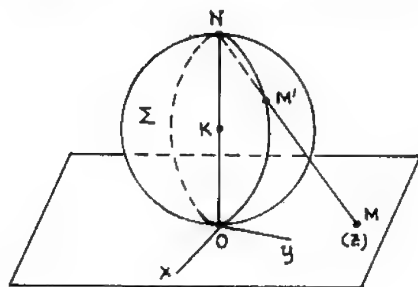
$$|z_n| > A \text{ διὰ καθε } n > N$$

Τό ἔξωτερικόν E ἑνός (αὐθαίρετως μεγάλου) κύκλου μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καλεῖται περιοχὴ τοῦ ἀπείρου ἐάν τό E θεωρεῖται ὡς ἓνα σύνολον εἰς τό ἐπευτεταμένον ἐπίπεδον (περιέχει τοῦτο τό ∞).

Συμφώνως πρός τ' ἀνωτέρω θά εἶναι $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ ἐάν, καθε περιοχὴ τοῦ ἀπείρου περιέχη πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἀμολοουδίας $\{z_n\}$, ἐντός ἑνός πεπερασμένου ἀριθμοῦ ἔξ αὐτῶν.

Ἡ σφαῖρα τοῦ Riemann.

Κατωτέρω θά δείξωμεν ἓναν τρόπον παραστάσεως τῶν μιχαδιῶν ἀριθμῶν ὑπὸ τῶν σημείων μιᾶς σφαίρας. Πρός τοῦτοις θεωροῦμεν μίαν σφαῖραν (Σ) ἐφαπτομένην τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τοῦ μιχαδιοῦ ἐπίπεδου (βλ. Σχ. 1). Θεωροῦμεν τήν διάμετρον τῆς σφαίρας τήν διερχομένην διὰ τοῦ O καί τῇ ὁποία τέμνει



Σχ. 1

ταύτην εἰς τὸ σημεῖον N (βόρειος) πόλος τῆς σφαίρας. Ἐστω ἡδὴ ἓνας τυχόν μιγαδικὸς ἀριθμὸς z ἀντιστοιχῶν εἰς τὸ σημεῖον M τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν NM , ἥ ὁποία τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς κάποιο σημεῖον, ἔστω M' . Οὕτω καὶ ἑκάς μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓνα σημεῖον τῆς σφαίρας. Ἀντιστρόφως, ἔστω ἓνα τυχόν σημεῖον M' τῆς σφαίρας. Φέρομεν τὴν NM' ἥ ὁποία τέμνει τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον M καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς, ἔστω z . Τέλος ὁ πόλος N ἀντιστοιχεῖ ἀμφιμονοσήμαντως μὲ τὸ σημεῖον $z = \infty$ τοῦ ἐπευτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοίχισιν μεταξὺ τῶν σημείων τῆς σφαίρας (Σ) καὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπευτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἡ ἀνωτέρω σφαῖρα καλεῖται *σφαῖρα* τοῦ Riemann καὶ ἡ ἀμφιμονοσήμαντος αὕτη ἀντιστοίχισις μεταξὺ τῶν σημείων τῆς σφαίρας τοῦ Riemann καὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπευτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καλεῖται *στερεογραφικὴ προβολή*.

§4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἐστω ὅτι G εἶναι ἓνα τυχόν, μὴ κενόν, σημειοσύνολον τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου \mathbb{C} , ἥτοι $G \subset \mathbb{C}$. Ἐάν τὸ z συμβολίσῃ ἓνα οἰονδήποτε σημεῖον τοῦ G , τότε τὸ z καλεῖται μία *μιγαδικὴ μεταβλητὴ* καὶ τὸ G καλεῖται *πεδῖον μεταβολῆς* τοῦ z .

Ὁρισμός I-4-1. Καλοῦμεν (μονότιμον) *συνάρτησιν* f *τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς* z , καὶ ἑκάς *μονοσήμαντον ἀπεικονίσιν τῆς μορφῆς*:

$$G \ni z \xrightarrow{f} w = f(z) \in \mathbb{C}$$

Τὸ z καλεῖται τότε *ανεξάρτητος μεταβλητὴ*, τὸ w ἐξαρτημένη μεταβλητὴ, τὸ G πεδῖον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως, τὸ " f ", εἶδος τῆς συναρτήσεως καὶ τὸ $f(G)$ πεδῖον τιμῶν τῆς συναρτήσεως.

Τὴν ὡς ἀνω συνάρτησιν θὰ συμβολίσωμεν συντόμως οὕτω:

$$w = f(z), \quad z \in G. \quad (1)$$

Ἡ παράστασις (1) καλεῖται ὁ *τύπος τῆς συναρτήσεως* f , ὁ δίδων τὴν

έξερτημένην μεταβλητήν W ἐν τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς z .

Διὰ μεταβλητάς ἀνεξαρτήτους ἢ ἐξερτημένας χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὰ γράμματα: z, w , ἢ μέ δεύτας ἢ χωρὶς δεύτας διὰ μιγαδικῆς μεταβλητῆς καὶ τὰ x, y, u, v, ξ, η διὰ πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Ἐάν τὰ z καὶ w γραφοῦν ὑπὸ τὴν μορφήν $z = x + iy$, $w = u + iv$, ἡ (1) ἐπιδέχεται ἐπίσης τὴν ἐρμηνείαν ὅτι εἰς τὸ ζεύγος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y ἀντιστοιχεῖ μέσω τῆς f ἓνα νέο ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν u καὶ v . Ἐμφανίζονται οὕτω τὰ u καὶ v ὡς ζεύγος πραγματικῶν συναρτήσεων τῶν δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καὶ y . Θέτομεν τότε:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

καὶ ἐπομένως ἡ (1) γράφεται

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

Ὡστε μία μιγαδικὴ συνάρτησις $f(z)$, $z \in G \subset \mathbb{C}$ παρίσταται πάντοτε οὕτω:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

μέ u καὶ v πραγματικῆς συναρτήσεως ὁρισμένas διὰ καθέ $z \in G$.

Ἡ συνάρτησις $u(x, y)$ ἀντιστοιχῶς $v(x, y)$ καλεῖται τὸ πραγματικὸν ἀντιστοιχῶς τὸ φανταστικὸν μέρος τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

● Παράδειγμα: Ἄς καθορίσωμεν τὸ πραγματικὸν καὶ φανταστικὸν μέρος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ μέ τύπον:

$$f(z) = z^2 + 3z + 4.$$

Λύσις: ἔχομεν:

$$u(x, y) + i v(x, y) = f(z) = (x + iy)^2 + 3(x + iy) + 4$$

ὁθεν:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 3x + 4, \quad v(x, y) = 2xy + 3y.$$

ὁμοίως, ἂν $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy$, ἔχομεν:

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Σημείωσις: Ἐντὸς τῆς ὡς ἄνω ὁρισθείσης μονοτίμου συναρτήσεως ἔχομεν καὶ τὰς λεγομένας πλειοτίμους συναρτήσεις, δηλ. εὐείνας εἰς τὰς ὁποίας εἰς ἐκάστην τιμὴν τοῦ z ἀντιστοιχοῦν πλείονες τῆς μιᾶς τιμαὶ τοῦ W , π.χ. ἡ συνάρτησις $w = \arg z$, $z \neq 0$ εἶναι πλειότιμος, ἀμυθέστερον ἀπει-

μόνιμος συνάρτησις, καθ' ὅσον ἂν θ εἶναι ἓνα ὄρισμα τοῦ z , τότε καὶ ὁ $\theta + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ εἶναι ἐπίσης ἓνα ὄρισμα τοῦ z . (βλ. Τόμος Πρῶτος, σελίς 108).

Ἀξιόλογος παρατήρησις. Ἐάν $M \subset \mathbb{R}$ καὶ $f(M) \subset \mathbb{C}$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ f εἶναι μία μιγαδική συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς, γράφομεν δὲ τότε ὡς τύπον ταύτης τὸν:

$$w = f(t) \quad \text{ἢ} \quad w = w(t) \equiv f(t) \quad \text{διὰ καθε } t \in M \quad (1)$$

ἀλλὰ $w(t) = u(t) + i v(t)$, ὅθεν ὁ τύπος (1) ἀναθύεται εἰς:

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad \text{διὰ καθε } t \in M \quad (2)$$

ὀρίζονται οὕτω δύο νέαι πραγματικαὶ συναρτήσεις, ἡ $u(t)$, $t \in M$ καὶ ἡ $v(t)$, $t \in M$, καθοῦνται δὲ τὸ πραγματικὸν ἀντιστοίχως τὸ φανταστικὸν μέρος τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $w(t)$, $t \in M$.

Λίδομεν τώρα τοὺς κατωθι ὀρισμούς:

Ὁρισμός I-4-2. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ μιγαδική συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς $w = w(t) = u(t) + i v(t)$ παραγωγίζεται, ἂν ὑπάρχουν αἱ $u'(t)$, $v'(t)$ καὶ ἰσχύη:*

$$w'(t) \equiv (u(t) + i v(t))' \equiv u'(t) + i v'(t).$$

Ὁρισμός I-4-3. *Θά λέγωμεν ὅτι ἡ μιγαδική συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς $w = w(t) = u(t) + i v(t)$ ὀδοιμηροῦται, ἂν ὑπάρχουν τὰ ὀδοιμηρώματα (ἀόριστα ἢ ὠρισμένα) $\int u(t) dt$, $\int v(t) dt$ καὶ ἰσχύη:*

$$\int w(t) dt \equiv \int [u(t) + i v(t)] dt \equiv \int u(t) dt + i \int v(t) dt$$

ἀντιστοίχως:

$$\int_a^b w(t) dt \equiv \int_a^b [u(t) + i v(t)] dt \equiv \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

§5. ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Ὁρισμός I-5-1. Ἐστω $w = f(z)$ μία μονότιμος μιγαδική συνάρτησις ὠρισμένη εἰς ἓνα σημειοσύνολον G τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἐυτός, ἴσως, εἰς τὸ σημεῖον $z_0 \in G$.

Θά λέγωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει ὄριον τὸν $w_0 \in \mathbb{C}$, ὅταν, τὸ z τείνει εἰς

ό z_0 και θα γράφωμεν τότε:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ ή } f(z) \rightarrow w_0, \text{ όταν } z \rightarrow z_0$$

έάν διά υάθε $\varepsilon > 0$, ύπάρχη ένας άριθμός $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ τοιοϋτος, ώστε να ισχύη:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ διά υάθε } z \in G \text{ μέ } 0 < |z - z_0| < \eta.$$

• Παράδειγμα: Δείξατε ότι:

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{z - 2i} = 4i$$

Λύσις: Παρατηρούμεν ότι ή συνάρτησις $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z - 2i}$ όρίσεται παντού εϋτός από τό σημείον $z = 2i$. Ό άνωτέρω όρισμός δέν άπαιτεί όπως ή $f(z)$ είναι όρισμένη εις τό $z = 2i$.

Όθεν διά $z \neq 2i$ έχομεν:

$$|f(z) - 4i| = |z - 2i|.$$

Έάν λάβωμεν: $0 < |z - 2i| < \varepsilon = \eta$, έχομεν:

$$|f(z) - 4i| < \varepsilon \text{ διά υάθε } z \in \mathbb{C} \text{ μέ } 0 < |z - 2i| < \eta.$$

Όθεν:

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{z - 2i} = 4i$$

Όρισμός I-5-2. Έστω $f(z)$ μία μιγαδιυή συνάρτησις ώρισμένη εις ένα σημειο-σύνολον G του μιγαδιουού επιπέδου εϋτός, ίσως εις τό σημείον z_0 του G . Θα λέ-γωμεν ότι ή $f(z)$ τείνει εις τό ∞ , όταν τό z τείνει εις τό z_0 και θα γράφω-μεν:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \text{ ή } f(z) \rightarrow \infty, \text{ όταν } z \rightarrow z_0$$

έάν, διά υάθε $A > 0$, ύπάρχη $\eta = \eta(A) > 0$ τοιοϋτον, ώστε:

$$|f(z)| > A \text{ διά υάθε } z \in G \text{ μέ } 0 < |z - z_0| < \eta.$$

Παράδειγμα:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} = \infty$$

Όρισμός I-5-3 Θα λέγωμεν ότι ή $w = f(z)$ έχει όριον τό $w_0 \in \mathbb{C}$, όταν τό z τείνει εις τό ∞ και θα γράφωμεν:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \text{ ή } f(z) \rightarrow w_0, \text{ όταν } z \rightarrow \infty$$

τότε και μόνον τότε, έάν, διά υάθε $\varepsilon > 0$, ύπάρχη πραγματιυός άριθμός

$M = M(\epsilon) < +\infty$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύη:

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \text{ διὰ καθε } z \in \mathbb{C} \text{ μέ } |z| > M(\epsilon).$$

• Ἐνεκα τῆς ἀναλογίας τῶν ὁρισμῶν τῶν ὁρίων δι' ἀμολουδίας καί συναρτήσεις μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ἰσχύουν καί ἐν προκειμένῳ οἱ κανόνες τῆς §3, κεφ. I, ἀρυεῖ μόνον ν' ἀντιυατασταθῇ τό σύμβολον $\lim_{n \rightarrow \infty}$ διὰ τοῦ $\lim_{z \rightarrow z_0}$ ἀντιστοιχῶς $\lim_{z \rightarrow \infty}$.

Ἐν τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως συνάγεται εὐμόλως ὅτι, ὅταν μία συνάρτησις $f(z)$ συχυλίνει πρὸς ἕνα μιγαδικόν ἀριθμόν, τότε τό πραγματιυόν ἀντιστ. τό φανταστιυόν μέρος αὐτῆς συχυλίνει πρὸς τό πραγματιυόν ἀντιστ. τό φανταστιυόν μέρος τοῦ ὁρίου της.

Ἀυριβέστερον ἰσχύει ἡ κατωδι:

Πρότασις I-5-1 Ἐστω $w = f(z) = u(z) + i v(z)$ μία μιγαδική συνάρτησις ὁρισυέμένη εἰς τό σημειοσύνολον G τοῦ \mathbb{C} εὐτός, ἴσως εἰς τό σημείο z_0 τοῦ G . Τότε αἱ κατωδι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

$$i) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i v_0 \quad (1)$$

$$ii) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = u_0 \text{ καί } \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = v_0 \quad (2)$$

Παρατήρησις Συμφώνως πρὸς τόν ὁρισμόν τοῦ ὁρίου μιᾶς πραγματιυῆς συναρτήσεως δύο πραγματιυῶν μεταβλητῶν (βλ. Μαθημ. Ἀνάλ. II, κεφ. II §4) αἱ σχέσεις (2) δύνανται νά γραφοῦν ὡς ἑξῆς

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0 \quad (3)$$

καί δηλοῦν ὅτι: διὰ καθε $\epsilon > 0$, ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός $\eta = \eta(\epsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύουν:

$$|u(x, y) - u_0| < \epsilon \text{ καί } |v(x, y) - v_0| < \epsilon \quad (4)$$

διὰ καθε $(x, y) \in G$ μέ $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \eta$.

Τοιουτοτρόπως, δύναται τις νά χρησιμοποιῇ τὰς ιδιότητες τῶν ὁρίων μιᾶς πραγματιυῆς συναρτήσεως δύο πραγματιυῶν μεταβλητῶν διὰ τὴν μελέτην τῶν ιδιοτήτων τῶν ὁρίων συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς.

Όρισμός I-5-4. Έστω ένα σύνολον $G \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in G$ και $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ μια μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής. Θά λέγουμε ότι η f είναι συνεχής εις τό σημείον z_0 τότε, και μόνον τότε, εάν υπάρχει η όριακή τιμή της συναρτήσεως διά $z \rightarrow z_0$ και ισοϋται μέ την τιμήν $f(z_0)$ της f εις τό z_0 , ήτοι εάν:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ίσχύει, ως και διά πραγματικής συναρτήσεως, η κατωδι:

Πρότασις I-5-2. Εάν $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ μέ τύπον $w = f(z)$ και $z_0 \in G$, τότε αι κατωδι προτάσεις είναι ισοδύναμοι:

- i) η f είναι συνεχής εις τό $z_0 \in G$.
- ii) διά καθε $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός αριθμός $\eta = \eta(\epsilon, z_0)$ τοιοῦτος, ώστε να ισχύη $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ διά καθε $z \in G$ μέ $|z - z_0| < \eta$.

Όρισμός I-5-5. Θά λέγουμε ότι η $w = f(z)$, $z \in G$ είναι συνεχής εν G τότε, και μόνον τότε, αν αυτή είναι συνεχής διά καθε $z \in G$.

Πρότασις I-5-3 Εάν αι συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$ είναι ορισμένες επί του G και συνεχείς εις τό σημείον $z_0 \in G$, τότε αι συναρτήσεις:

$f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$, $k \cdot f(z)$ (k : σταθερά), $\frac{f(z)}{g(z)}$ μέ $(g(z_0) \neq 0)$ είναι επίσης συνεχείς εις τό σημείον z_0 .

Η απόδειξις, ως εϋνοδος, αφήνεται ως άσκησης εις τόν αναγνώστην.

Πρότασις I-5-4. Εάν η $f(z)$ είναι συνεχής μέ $f(z_0) = w_0$ και εάν $g(w)$ είναι συνεχής εις τό w_0 , τότε η (σύνθετος) συνάρτησις $g(f(z))$ είναι συνεχής εις τό z_0 .

Απόδειξις: Εφ' όσον η $g(w)$ είναι συνεχής εις τό w_0 θα έχωμεν ότι διά καθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon) > 0$ τοιοῦτον, ώστε:

$$|g(w) - g(w_0)| < \epsilon, \text{ όταν } |w - w_0| < \epsilon'.$$

Επίσης, εφ' όσον $f(z)$ είναι συνεχής εις τό z_0 , υπάρχει ένας θετικός αριθμός $\eta = \eta(\epsilon') = \eta(\epsilon)$ τοιοῦτον, ώστε:

$$|f(z) - w_0| < \epsilon' \text{ όταν } |z - z_0| < \eta.$$

Θέτοντες $w=f(z)$, λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων:

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon, \text{ ὅταν } |z - z_0| < \eta.$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ $g(f(z))$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ z_0 .

Πρότασις I-5-5. Ἐστω $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ μία (μιγαδική) συνάρτησις, συνεχὴς εἰς ἓν σημεῖον $z_0 \in G$. Τότε διὰ κάθε ἀπολογουδίου $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τοῦ G μέ $z_n \rightarrow z_0$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ z_0 , ἔχομεν:

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } z \in G \text{ μέ } |z - z_0| < \eta.$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $z_n \rightarrow z_0$, ἔχομεν:

$$|z_n - z_0| < \eta \text{ διὰ κάθε φυσικοῦ ἀριθμοῦ } n \text{ μέ } n > N.$$

$$\text{Ὅθεν} \quad |f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } n > N$$

ὅπερ σημαίνει, ὅτι $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

• ἔχοντες τώρα ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν πρότασιν I-4-1, ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τὴν κατωθί:

• Πρότασις I-5-6. Μία συνάρτησις $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, ὠρισμένη ἐν G , εἶναι τότε, καὶ μόνον τότε συνεχὴς, ἐὰν τὸ πραγματικόν καὶ φανταστικόν μέ-
ρος εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις ἐν G .

Παράδειγμα: Ἐστω ἡ συνάρτησις μέ τύπον:

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \text{ἐὰν } z \neq i \\ 0, & \text{" } z = i \end{cases}$$

Ἐξετάσατε ὡς πρὸς τὴν συνέχειαν ταύτην.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = i^2 = -1$. Ἐξ ἄλλου εἶναι $f(i) = 0$. Ὅθεν, $\lim_{z \rightarrow i} f(z) \neq f(i)$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δὲν εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $z=i$. Δυνάμεθα ὁμως, νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἄρσιν τῆς ἀσυνεχείας

ή ως λέγομεν ἔχομεν "αἰρομένην ἀσυνέχειαν", ἐάν εἰς τὸν τύπον τῆς συναρτήσεως ἀποδόσωμεν διὰ $z = i$ εἰς τὴν συνάρτησιν τὴν τιμὴν -1 .

Ὁρισμός I-5-6. Θά λέγωμεν ὅτι μία συνάρτησις f ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ χωρίου G εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν G , τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\eta(\varepsilon) > 0$ (ἐξαρτώμενος μόνον ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε διὰ καθε $z_1, z_2 \in G$ ἡ σχέσις

$$|z_1 - z_2| < \eta(\varepsilon) \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα: θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ μέ τύπον $f(z) = z^2$ καὶ $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$.

Θά δειξωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπὶ τοῦ Δ .

Πράγματι, διὰ καθε z_1 καὶ z_2 τοῦ Δ ἔχομεν:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^2 - z_2^2| = |z_1 + z_2| \cdot |z_1 - z_2| \leq 2 \cdot |z_1 - z_2|,$$

ἐφ' ὅσον $0 < |z| \leq 1$. Ἐάν τώρα λάβωμεν ὡς $\eta = \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, τότε διὰ καθε δύο σημεία z_1, z_2 τοῦ Δ οὕτως, ὥστε $|z_1 - z_2| < \eta$ θά ἔχωμεν πάντοτε:

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

Ὅθεν ἡ $f(z) = z^2$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπὶ τοῦ Δ .

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τὸ κατωθι βασιυόν θεώρημα.

Θεώρημα I-5-1. Ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς ἓνα κλειστόν καὶ φραγμένον χωρίον \bar{G} , τότε αὕτη εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ.

(βλ. ἀπόδειξιν βιβλίον "Complex Analysis with Applications", ὑπὸ τοῦ Richard A. Silverman).

§ 6. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΕΥΟΝΤΟΣ ΟΡΙΣΜΑΤΟΣ $\arg z$

Ἄς θεωρήσωμεν τὰ σημεία τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου \mathbb{C} τὰ ὁποῖα ικανοποιοῦν τὴν σχέσιν $z + |z| \neq 0$ (1). Ἡ σχέσις (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τὸ νὰ θεωρήσωμε τὸ \mathbb{C} ἐφ' ὅσον ἀπὸ αὐτὸ ἐξαιρέσωμεν τὰ σημεία τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν σχέσιν $z + |z| = 0$ (2)

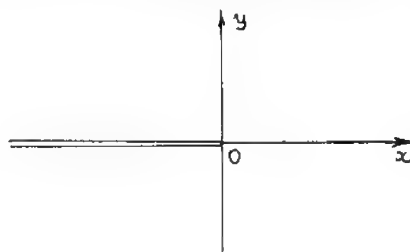
Η δέ σχέση (2) γράφεται:

$$(x + \sqrt{x^2 + y^2}) + iy = 0 \quad (2')$$

Ίνα πληρωθεί η (2'), αρμεί $y=0$, ότε αυτή γίνεται:

$$x = -\sqrt{x^2} \leq 0 \quad (3)$$

Λόγω της (3) αρμεί νά εξαірέσωμεν έυ του \mathbb{C} τά σημεία του άρνητιου άξονος συμπεριλαμβανομένου και του μη-δενός. Τό σύνολον τών σημείων του μιγαδικου επιπέδου που ικανοποιούν την (1) καλείται πρωτεύον χωρίον (Σχ.1).



Σχ.1

Θεώρημα I-6-1. Τό πρωτεύον όρισμα

$\arg z$, όπου z υείται επί του πρωτεύοντος χωρίου, είναι συνεχής συνάρτησις του z .

Απόδειξις: Κατ' αρχάς άς λάβωμεν $z_0=1$.

Έστω δέ z ένα σημείον έντός ενός κύκλου αυτίνος $\delta < 1$ και κέντρου $z_0=1$. Έστω επί πλέον $\theta = \arg z$, τότε $\cos \theta = x > 1 - \delta > 0$ (βλ. Σχ.2).

Όθεν, $\theta < \frac{\pi}{2}$ και επί πλέον $|y| < \delta$.

Έστω ε ένας δοθείς θετιμός αριθμός.

Ήδη ίνα έχωμεν:

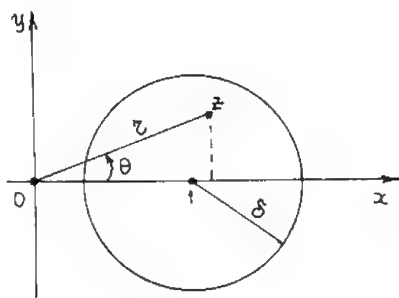
$|\arg z - 0| = |\theta| \leq \varepsilon \phi |\theta| = \frac{|y|}{x} < \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon$, αρμεί νά λάβωμεν $\delta < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Όθεν, ή συνάρτησις $\arg z$ είναι συνεχής είς τό σημείον $z_0=1$.

Έστω ήδη ένα αύθαίρετον σημείον z_0 είς τό πρωτεύον χωρίον. διά δ άρ-ουσύντως μικρόν και διά τά z τά ικανοποιούντα την σχέση $|z - z_0| < \delta$ δυνά-μεθα νά επιτύχωμεν $|\arg \frac{z}{z_0}| < \pi - |\arg z_0|$.

Διά τά z του χωρίου $|z - z_0| < \delta$ τό $\arg z_0 + \arg \frac{z}{z_0}$ είναι ένα τών όρισμάτων του z και έπειδή $|\arg \frac{z}{z_0}| + |\arg z_0| < \pi$ ή $-\pi < \arg \frac{z}{z_0} + \arg z_0 < \pi$, έπεται διά τό πρωτεύον όρισμα του z δά έχωμεν:

$$\arg z = \arg z_0 + \arg \frac{z}{z_0} \quad (1) \quad (\text{βλ. σχετ. Κεφ. I, §1}).$$

Έάν θέσωμεν $\frac{z}{z_0} = w$, τότε του $z \rightarrow z_0$ τό $w \rightarrow 1$.



Σχ.2

Ἐν τῇ σχέσει (1) λαμβάνομεν:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha \tau \gamma z = \alpha \tau \gamma z_0 + \lim_{z \rightarrow z_0} \alpha \tau \gamma \frac{z}{z_0} = \alpha \tau \gamma z_0 + \lim_{w \rightarrow 1} \alpha \tau \gamma w = \alpha \tau \gamma z_0 + 0.$$

Ὅθεν, $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha \tau \gamma z = \alpha \tau \gamma z_0$. Ἡ τελευταία σχέση ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

§ 7. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἐστω ἡ μονότιμος συνάρτησις $w=f(z)$ μὲ πεδὶον ὁρισμοῦ τὸ G καὶ πεδὶον τιμῶν τὸ E . Θεωροῦντες τὸ z ὡς συνάρτησιν τοῦ w αὕτη ἡ συνάρτησις γράφεται: $z=f^{-1}(w) \equiv \varphi(w)$ καὶ ἡ ὁποία ἔχει πεδὶον ὁρισμοῦ τὸ E .

Ἡ συνάρτησις $z=\varphi(w)$ καλεῖται ἀντίστροφος τῆς δοθείσης. Ἡ αὕτη ἐν γένει εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις ἀπεικονίζουσα ἓνα σημεῖον w τοῦ E εἰς πλείονα τοῦ ἑνός (ἐνδεχομένως καὶ ἄπειρα) σημεία τοῦ G . Ὡς σημειωθῇ ὅτι ἡ $z=\varphi(w)$ εἶναι μία μονότιμος συνάρτησις, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν, διὰ $z_1 \neq z_2$ εἶναι $f(z_1) \neq f(z_2)$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ $w=f(z)$ καὶ ἡ $z=\varphi(w)$ δημιουργοῦν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικονίσιν μεταξὺ τῶν πεδίων G καὶ E .

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $w=|z|$ εἶναι μία μονότιμος ἀλλὰ ἡ ἀντίστροφός της εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις. Πράγματι, διὰ $w=\rho > 0$ ἔχομεν τὰς τιμὰς τοῦ z ποὺ δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $|z|=\rho$, δηλ. τὰ σημεία τῆς περιφέρειας $(0,\rho)$.

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

1. Προσδιορίσατε τὰ σημεία συσσωρεύσεως τῶν κατωθι συνόλων, ὅπου $n \geq 1$.

i) $z_n = i^n$ ii) $z_n = (\frac{1}{n})i^n$, iii) $|z| > 1, 0 \leq \alpha \tau \gamma z < \frac{\pi}{2}$ iv) $z_n = (-1)^n (1+i)(n-1)/n$.

Ἀπάντ. i) δέν ἔχει ii) τὸ 0 iv) $\pm(1+i)$.

2. Εὑρετε τὸ πραγματικὸν καὶ φανταστικὸν μέρος τῶν κατωθι συναρτήσεων:

i) $w = z^3 - 2z$, ii) $w = yz + iz$, iii) $w = \frac{z}{z^2 - 1}$

iv) $w = \frac{z-1}{z+1}$, v) $w = \frac{1}{z^2}$, vi) $w = 2z^2 - z + 1$.

3. Ἐὰν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ καὶ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, τότε τὰ σημεία z_1, z_2, z_3 εἶναι αἱ κορυφαὶ ἑνὸς ἰσοπλευροῦ τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν μοναδιαῖον κύκλον.

4. Να γίνει γραφική παράσταση του συνόλου των τιμών του z διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν :

$$i) \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 \quad ii) \left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 3 \quad iii) \operatorname{Re} z^2 = c \quad iv) \operatorname{Im} z^2 = c \quad -\infty < c < +\infty.$$

5. Ἐπὶ τῆς σφαίρας τοῦ Riemann νὰ εὐρεθῶσιν αἱ εἰσόδους τῶν χωρίων τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀμοιβαίων ἀνισοτήτων.

$$i) \operatorname{Im} z > 0, \quad ii) \operatorname{Im} z < 0, \quad iii) \operatorname{Re} z > 0$$

$$iv) \operatorname{Re} z < 0, \quad v) |z| < 1, \quad vi) |z| > 1$$

6. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μὲ τύπον :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{[\operatorname{Re}(z^2)]^2}{|z^2|}, & \text{ἐὰν } z \neq 0 \\ 0, & \text{ἐὰν } z = 0 \end{cases}$$

Δείξατε ὅτι αὕτη εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $z=0$.

7. Αἱ συναρτήσεις $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \frac{z}{|z|}, \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, \frac{z \cdot \operatorname{Re} z}{|z|}$

εἶναι πᾶσαι συνεχεῖς διὰ $z \neq 0$. Ποῖαι ἀπὸ αὐτὰς δύνανται νὰ ὁρισθῶσιν εἰς τὸ σημεῖον $z=0$, εἰς τρόπον ὥστε ἡ «ἐπευτεταμένη» συνάρτησις νὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $z=0$;

8. Δείξατε ὅτι, ἡ συνάρτησις $f(z) = z^2$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπὶ τοῦ πεδίου $|z| < 1$.

9. Δείξατε, ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{z}$ δὲν εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς εἰς τὸ πεδίου $|z| < 1$.

10. Δοθέντος ὅτι, $z_1, z_2 \neq 0$ χρησιμοποιοῦντες πολικὴν μορφήν, δείξατε ὅτι $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| \cdot |z_2|$ ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν, $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ὅπου $\theta_1 = \arg z_1$ καὶ $\theta_2 = \arg z_2$.

11. Δοθέντος ὅτι $z_1 \cdot z_2 \neq 0$, χρησιμοποιοῦντες τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως δείξατε ὅτι :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|, \quad \text{ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν, } \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi, \quad \text{ὅπου } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ καὶ}$$

$$\theta_1 = \arg z_1, \quad \theta_2 = \arg z_2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΕΙΡΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§1. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΕΩΣ ΣΕΙΡΩΝ

Έστω ή ακολουθία $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τών μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Τό συμβολικόν ἄθροισμα :

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (1)$$

τό ὁποῖον συμβολίζομεν συντομώτερον ὡς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

υαλεῖται σειρά μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ γενικόν ὅρον τό z_n .

Ἐυαστον ἄθροισμα :

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

υαλεῖται μερικόν ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (1).

Ὁρισμός II-1-1. Θά λέγωμεν ὅτι ή σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγχλίνει πρὸς τόν ἀριθμόν S καί δά γράφωμεν $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, τότε καί μόνον τότε, ἂν ή ακολουθία $\{S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τών μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1) συγχλίνει πρὸς τόν ἀριθμόν S , ἥτοι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Τό S υαλεῖται τότε τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (1).

Ἐν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται, ὅτι ή σύγκλισις μιᾶς σειρᾶς ἀνάγεται εἰς τήν σύγκλισιν τῆς ακολουθίας τών μερικῶν τῆς ἀθροισμάτων.

Ἐάν ή ακολουθία $\{S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ δέν ἔχη ὄριον ἢ ἔχη ὄριον τό ∞ , τότε λέγομεν ὅτι ή σειρά (1) ἀποκλίνει.

• Παράδειγμα Νά μελετηθῇ ὡς πρὸς τήν σύγκλισιν ή γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Λύσις: Ἐχομεν:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \text{ μέ } z \neq 1$$

τότε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-z}, & \text{ἂν } |z| < 1 \\ \neq, & \text{ἂν } |z| \geq 1 \end{cases}$$

Ἐστω ή συγχλίνουσα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = S \quad (1'')$

Ἡ διαφορά: $R_n = S - S_n = z_{n+1} + z_{n+2} + \dots$ υαθεῖται ὑπόλοιπον τῆς συχλι-
νούσης σειρᾶς (1'') τάξεως n .

Προφανώς, ἵνα ἡ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συχλίνη, πρέπει καὶ ἀρκεῖ: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

- ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν πρότασιν I-1-2 καὶ τοὺς συμβολισμοὺς τῆς σελίδος 107 τοῦ πρώτου Τόμου ἀποδεικνύομεν εὐκόλως τὴν ἀνωτῶτι σπουδαίαν πρότασιν, ἥτις ἀνάγει τὴν σύχλινσιν μιᾶς σειρᾶς μέ μιγαδικούς ὅρους εἰς τὴν σύχλινσιν σειρῶν μέ πραγματικούς ὅρους.

Πρότασις II-1-1. Ἐστω ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ μέ $z_n = x_n + iy_n$.

Αἱ ἀνωτῶτι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(S)$ καὶ $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(S)$

Πρότασις II-1-2. Ἐάν $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ καὶ $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = S \pm T$ καὶ $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot z_n = k \cdot S$ (k = σταθερά).

Ἡ ἀπόδειξις ἀφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τὸν ἀναγνώστην.

- Μία ἱσυνὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη συχλίσσεως σειρᾶς μέ μιγαδικούς ὅρους προϋπτεῖ ἀπὸ τὸ κριτήριον τοῦ Cauchy (βλ. πρότασιν I-1-3) δι' ἀμολουθί-
ας μέ μιγαδικούς ὅρους.

Σχετικῶς ἰσχύει ἡ ἀνωτῶτι.

Πρότασις II-1-3. (Κριτήριον τοῦ Cauchy διὰ σειρᾶς). Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ συχλίνη μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι: διὰ ἀ-
θε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀμέραιος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη:

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_m| \leq \sum_{k=n+1}^m |z_k| < \varepsilon \text{ διὰ } m > n > N. \text{ ἢ } |S_n - S_m| < \varepsilon \text{ διὰ } n > N(\varepsilon) \text{ καὶ } k=1, 2, \dots$$

Ἀπόδειξις: Ἡ πρότασις δηλοῖ ὅτι ἡ ἀμολουθία $\{S_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τῶν μερικῶν ἀθρο-
ισμάτων συχλίνει ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, αὕτη εἶναι μιὰ ἀμολουθία Cauchy. Τοῦ-
το ὅμως ἀποτελεῖ τὸ περιεχόμενον τῆς προτάσεως I-2-3.

Ἐν τῷ κριτηρίῳ τοῦ Cauchy ἐξάγεται τώρα εὐνόηως ἡ κατωτέρω:

Πρόταση II-1-4. Ἀναγκαῖα (ἀλλ' ὄχι ἱκανή) συνθήκη διὰ τὴν σύγκλισιν τῆς σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Παρατήρησις: Ἡ ἀνωτέρω πρότασις διατυπῶνται καὶ οὕτω: ἔάν $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$, τότε ἡ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ἀποκλίνει.

Ὁρισμός II-1-2. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ (μέ μιγαδικούς ὅρους) συγκλίνει ἀπολύτως τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ σειρά (μέ πραγματικούς ὅρους) $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει.

Ἰσχύει καὶ ἐδῶ ἡ ἀντίστοιχος τῆς προτάσεως VIII-3-1 τοῦ Πρώτου Τόμου, ἥτοι ἡ:

Πρόταση II-1-5. Ἐάν μία σειρά μιγαδικῶν ἀριθμῶν συγκλίνη ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἀπλῶς.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν II-1-3, θὰ ἔχωμεν: διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀμέραιος $N = N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύη:

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_m| < \varepsilon \quad \text{διὰ } m > n > N.$$

Ἀλλὰ

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_m| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_m|$$

καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_m| < \varepsilon \quad \text{διὰ } m > n > N$$

Ὅθεν, κατὰ τὸ κριτήριον τοῦ Cauchy, ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει.

Παρατήρησις: Τὸ ἀντίστροφον τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δὲν ἰσχύει, ἥτοι ἡ σύγκλισις τῆς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ δὲν συνεπάγεται πάντοτε τὴν σύγκλισιν τῆς $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, ὡς ἐμφαίνεται ἀπὸ τὴν σειράν $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ἥτις συγκλίνει ἀπλῶς, ἀλλὰ οὐκ ἀπολύτως.

Πρόταση II-1-6. (Κριτήριον συγκρίσεως). Ἐάν $|z_n| \leq |w_n|$ διὰ καθε $n > N_0$ καὶ ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνει ἀπολύτως, τότε ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει ἀπολύτως.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συγκλίνει ἀπολύτως θὰ ἔχωμεν: διὰ κα-

θε $\varepsilon > 0$ υπάρχει άμεραιος $N \geq N_0$ τοιούτος, ώστε διά υάθε $n, m > N$ νά ισχύη:

$$|W_{n+1}| + |W_{n+2}| + \dots + |W_m| < \varepsilon.$$

Άλλά

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_m| \leq |W_{n+1}| + |W_{n+2}| + \dots + |W_m| \text{ διά } n > N_0$$

Ύθεν:

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots + |z_m| < \varepsilon \text{ διά υάθε } n > N$$

υαί συνεπώς ή σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συχυλίνει άπολύτως.

• Διά σειράς μέ μιγαδικούς όρους ισχύουν, ως ευνόλως δύναται τις νά άποδείξη, αί αντίστοιχοι τών προτάσεων VIII-5-1 (υριτήριον τών ριζών του Cauchy) υαί VIII-5-2 (υριτήριον τών λόγων του D' Alembert) του Πρώτου Τόμου.

Έπίσης ισχύει ή αντίστοιχος της προτάσεως XVII-1-1 του Πρώτου Τόμου, ήτοι ή πρότασις:

Πρότασις II-1-7. (Γινόμενον σειρών υατά Cauchy).

ΎΕστωσαν αί σειραί $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ υποδέτομεν ότι:

1^η/ Ή σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συχυλίνει άπολύτως (υατά συνέπειαν υαί άπλως), έστω δέ

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

2^η/ Ή σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ συχυλίνει άπλως υαί έστω $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$.

3^η/ Έστω $C_n = \sum_{k=1}^n z_k w_{n-k+1} = z_1 w_n + z_2 w_{n-1} + \dots + z_{n-1} w_2 + z_n w_1$, $n=1, 2, \dots$

Τότε: $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = S \cdot T$.

Διά μίαν άπόδειξιν της άνωτέρω προτάσεως παραπέμπομεν τόν άναγνώστην εις τά υάτωδι βιβλία.

1) K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, pp. 146-147.

2) Φ. Βασιλείου, Άνώτερα Μαθηματικά, Τόμος Α', τεύχος β' σελ. 475-476.

Άσκησης

1. Υπολογίστε, εφ' όσον υπάρχουν, τα κάτωθι όρια:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} i^n$, ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+i)^2}{3^{2n}}$, iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(-1)^n + \frac{ni}{n+1} \right]$

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! i^n}{n^n}$, v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n^2}$, vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1-2ni}{n+2i}$.

2. Δείξτε ότι, εάν $z_n \rightarrow a, n \uparrow \infty$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = a$$

3. Να εύρεθούν τα κάτωθι όρια:

i) $z_n = \frac{2^n}{n!} + \frac{i^n}{2^n}$ ii) $z_n = \sqrt[n]{n} + i \cdot n \cdot q^n$ ($|q| < 1$). iii) $z_n = \sqrt[n]{a} + i n \mu \frac{1}{n}$ ($a > 0$)

4. Να εξετασθούν ως προς την σύγκλιση αι κάτωθι σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 i^n$, iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! i^n}{n^n}$, iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 i^n}{n^2 + 1}$ v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3} \right)^n$, vi) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2+3i} \right)^n$

vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{i(1+i)^{n+1}}$ viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n+2}$, ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} i^n$, x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3^n) i^n}{3^n \cdot n^3}$.

5. Έστω $\{z_n\}, n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, έστω δέ ότι υπάρχει

τό $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \ell$. Δείξτε τότε ότι:

i) εάν $\ell < 1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγχλίνει απόλυτως

ii) εάν $\ell > 1$, η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

Τι συμβαίνει εάν $\ell = 1$;

§ 2. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΑΙ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΑΙ ΔΙ' ΑΥΤΩΝ.

Όρισμός II-2-1. Καλούμεν δυναμοσειράν μέ μιγαδικούς συντελεστές κέντρου z_0 υάδε σειράν της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = C_0 + C_1 (z-z_0) + \dots + C_n (z-z_0)^n + \dots \quad (1)$$

ένθα z είναι μιγαδική μεταβλητή καί z_0, C_1, C_2, \dots είναι σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί. Οι αριθμοί $C_n, n=0,1,\dots$ καλούνται συντελεστές της δυναμοσειράς (1).

Διά του μετασχηματισμοῦ $w = z - z_0$ τῆς μεταβλητῆς z ἡ δυναμοσειρά με κέντρον τὸ σημεῖον z_0 ἀνάγεται εἰς μίαν δυναμοσειράν τῆς μεταβλητῆς w με κέντρον τὸ 0.

Προφανῶς πᾶσα δυναμοσειρά συγχλίνει πάντοτε εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς.

Πρόταση II-2-1. (Θεώρημα τῶν Cauchy-Hadamard)

Κάθε δυναμοσειρά τῆς μορφῆς (1) ἔχει μία "αὐτὴν συγχλίνεως" R τοιαύτην, ὥστε: ὅταν $0 < R < +\infty$ ἡ σειρά συγχλίνει ἀπολύτως διὰ $|z - z_0| < R$ καὶ ἀποχλίνει διὰ $|z - z_0| > R$. Ὅταν $R = 0$ ἡ σειρά συγχλίνει μόνον διὰ $z = z_0$, ἐνῷ ἂν $R = +\infty$, ἡ σειρά συγχλίνει διὰ πᾶν $z \in \mathbb{C}$.

Ἀπόδειξις: Ἐάν υἱθέσωμεν $a_n = C_n (z - z_0)^n$, ἔχομεν:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} \cdot |z - z_0| = |z - z_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \frac{|z - z_0|}{R}$$

ἐνθα

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$$

Ἡ σειρά (1) λοιπόν, συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον τῶν ριζῶν τοῦ Cauchy, συγχλίνει ἀπολύτως ὅταν $\frac{|z - z_0|}{R} < 1$, δηλαδὴ ὅταν $|z - z_0| < R$ καὶ ἀποχλίνει ὅταν $\frac{|z - z_0|}{R} > 1$, δηλαδὴ ὅταν $|z - z_0| > R$. Ὅταν $R = 0$, ἡ σειρά θὰ συγχλίνει μόνον διὰ $z = z_0$. Τέλος, ἂν $R = \infty$, τότε ἡ σειρά συγχλίνει δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ z .

Παρατήρησις: Ὅταν $0 < R < +\infty$, τότε ὁ κύκλος $|z - z_0| = R$ καλεῖται "κύκλος συγχλίνεως" τῆς δυναμοσειρᾶς (1), ὁ δὲ θετικὸς ἀριθμὸς R , καλεῖται, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, "αὐτὴς συγχλίνεως" τῆς δυναμοσειρᾶς (1). Ἡ ἀνωτέρω Πρότασις II-2-1 μᾶς πληροφορεῖ ὅτι πᾶσα δυναμοσειρά τῆς μορφῆς $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ συγχλίνει ἀπολύτως εἰς πᾶν σημεῖον εἰρημένον εἰς τὸ ἐσωτεριὸν τοῦ κύκλου συγχλίνεως τῆς καὶ ἀποχλίνει εἰς πᾶν σημεῖον εἰρημένον εἰς τὸ ἐξωτεριὸν τοῦ κύκλου συγχλίνεως αὐτῆς. Ὅπως παρατηροῦμεν, ἡ πρότασις σὺδεμίαν πληροφορίαν παρέχει περὶ τῆς συγχλίνεως ἢ ἀποχλίνεως τῆς σειρᾶς εἰς τὰ συνοριακὰ σημεῖα τοῦ κύκλου συγχλίνεως. Πράγματι ἡ συμπεριφορὰ τῆς σειρᾶς διὰ τὰ σημεῖα αὐτὰ ποικίλει ἀπὸ τῆς μιᾶς περιπτώσεως εἰς τὴν ἄλλην, ὅπως βλέπομεν ἀπὸ τὰ κατωθι παραδείγματα, εἰς τὰ ὅποια ἡ αὐτὴς συγχλίνεως $R=1$.

Παράδειγμα 1% Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ είναι άπουλινουσα δι' όλα τα συννοριακά σημεία.

Παράδειγμα 2% Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ συγυλίνει διὰ υάθε σημείου του υύλου συγυλίσσεως της.

Παράδειγμα 3% Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγυλίνει διὰ $z=-1$ υαί άπουλίνει διὰ $z=1$.

Έφαρμόδουτες τό υριτήριον τών λόγων του D' Alembert παραιορουμέν οτι έάν τό :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| < 1$$

υαί άπουλίνει έάν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| > 1$$

θέτουτες :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad (2)$$

παραιορουμέν οτι ή δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ συγυλίνει, όταν $|z-z_0| < R$ υαί άπουλίνει, όταν $|z-z_0| > R$. Όθεν ή αυτίς συγυλίσσεως της (1) δίδεται υαί υπό του τύπου (2), όταν τό όριον του δευτέρου μέλους υάρεχη.

Έάν τό $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$ υάρεχη, τότε αυτό ίσοϋται μέ τό $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|C_n|}$ (βλ. Τόμος Πρώτος, πρότασις VII-6-1)

Όθεν, ή αυτίνα συγυλίσσεως της (1) δίδεται έπίσης υπό του τύπου :

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|}} \quad (3)$$

υπό την προϋπόθεσιν, βεβαίως, ότι τό όριον δεξιά υάρεχει.

Παράτήρησις : Έυ του όρισμου της αυτίνας συγυλίσσεως μιās δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot z^n$ συνάγεται, ότι :

διὰ υάθε z μέ $|z| < R$ ή σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n \cdot z^n|$ συγυλίνει, δηλαδή ή σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ συγυλίνει άπολύτως, όποτε αύτη συγυλίνει υαί άπλώς, όρίδεαι όθεν μία συνάρτησις :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot z^n, \text{ διὰ υάθε } z \text{ μέ } |z| < R.$$

§ 3 Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ e^z

Εἰς τὴν προηγούμενην παράγραφον ἐλέχθη ὅτι ὑάθε δυναμοσειρά τῆς μορφῆς :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad \text{ἀντιστοιχῶς} \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

τῆς ὁποίας ἡ αὐτὴς συγχλίσεως εἶναι $R > 0$, ὁρίζει διὰ ὑάθε $z \in \mathbb{C}$ μὲ $|z| < R$ ἀντιστοιχῶς διὰ ὑάθε $z \in \mathbb{C}$ μὲ $|z-z_0| < R$ μίαν μιγαδιυτὴν συνάρτησιν :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad \text{ἀντιστοιχῶς} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n.$$

Ἐς θεωρήσωμεν τῶρα τὴν ἀναμοσειράν : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, ὅπου $0! = 1$, καὶ $1! = 1$. Αὕτη, ὡς εὐλόγως εὐρίσχομεν, ἔχει αὐτὴν συγχλίσεως $R = +\infty$, ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν II-2-1, αὕτη συγχλίνει διὰ ὑάθε $z \in \mathbb{C}$, μάλιστα δὲ αὕτη συγχλίνει καὶ ἀπολύτως, καθ' ὅσον συγχλίνει πάντοτε ἡ σειρά.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = 1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \dots + \frac{|z|^n}{n!} + \dots$$

Δυνάμει τῶρα τῶν ἀνωτέρω ἡ ἀναμοσειρά : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ὁρίζει διὰ ὑάθε $z \in \mathbb{C}$ μίαν μιγαδιυτὴν συνάρτησιν $f(z)$, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν μὲ e^z , ἥτοι :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (1)$$

καὶ τὴν καλοῦμεν εὐθετιυτὴν συνάρτησιν.

Θὰ ἴδωμεν τῶρα μεριυὰς χαρακτηριστιυὰς ιδιότητας τῆς εὐθετιυτῆς συναρτήσεως e^z :

Πρότασις II-3-1. Ἐὰν $z_1 = x_1 + iy_1$ καὶ $z_2 = x_2 + iy_2$ εἶναι δύο μιγαδιυοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει :

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (2)$$

Ἀπόδειξις : Διὰ $z = z_1, z_2$ αἱ δύο σειραὶ (1) συγχλίνουν ἀπολύτως, ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν II-1-7 εἶναι :

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots \right) = \\ &= 1 + z_1 + z_2 + \frac{z_1^2}{2!} + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2!} + \dots = 1 + (z_1 + z_2) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2!} \right) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)! m!} z_1^{n-m} z_2^m \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z_1^{n-m} z_2^m \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} \quad \text{ὁ. ἔ. δ.} \end{aligned}$$

Παρατήρησης: Θέτοντες $z_1 = z$ και $z_2 = -z$ ευ της (2) λαμβάνομεν:

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad (3)$$

Πρόταση II-3-2: 'Εάν $z = x + iy$, τότε ισχύει:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (4)$$

Απόδειξις: 'Εάν $z = x + iy$, λόγω της (2) έχουμε:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

'Ευ της (1) διά υαθαρώς φανταστικόν $z = iy$ ($y = \text{πραγματικός}$) έχουμε:

$$e^{iy} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \dots + \frac{(yi)^n}{n!} + \dots$$

ή χωρίζοντες τούς πραγματικούς και μιγαδικούς όρους:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right)$$

'Εχοντες τώρα υπό ὄψιν τὰ ἀναπτύγματα κατά MacLaurin τῶν συναρτήσεων $\cos y$ και $\sin y$ (βλ. Τόμος Πρῶτος, σελίς 647) εἰς συχυλίνουσας δυναμοσειράς λαμβάνομεν:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

(5)

και ἐπομένως:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Σημείωσις: 'Ευ της (5) διά $y = \pi$ και $y = 2\pi$ λαμβάνομεν:

$$e^{i\pi} = -1 \quad \text{και} \quad e^{2\pi i} = 1$$

• Ἡ σχέση (5) παρέχει νέον τρόπον (ευθετικῆς) παραστάσεως μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ: $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$. 'Επίσης ευ της (5) δι' ἀλλαγῆς τοῦ y εἰς $-y$ προκύπτει:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \quad (6)$$

'Ευ τῶν (5) και (6) έχουμε τούς τύπους:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

(7₁)

και

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

(7₂)

τούς ὁποίους ἐχρησιμοποίησαμεν εἰς τό κεφάλαιον τῶν Διαφορικῶν Εἰσιώσεων.

Πρόταση II-3-3. 'Εάν $z = x + iy$, τότε ισχύουν:

i) $e^z \neq 0$ διά υάθε $z \in \mathbb{C}$ (8)

ii) $|e^{iy}| = 1$ και $|e^z| = e^x$ ($z = x + iy$) (9)

iii) Άναγκαία και ικανή συνθήκη, να $e^z = 1$, είναι ότι $z = 2k\pi i$ (όπου k είναι ά-
κέραιος αριθμός).

iv) Άναγκαία και ικανή συνθήκη, να $e^{z_1} = e^{z_2}$, είναι ότι: $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: i) χρησιμοποιώντας την (2) έχουμε:

$$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$$

Έφ' όσον τό γινόμενον είναι διάφορον του μηδενός, ούδεις τών παραγόντων
 είναι μηδέν και επομένως $e^z \neq 0$ διά πάθε z .

ii) Έν τής (5) λαμβάνομεν:

$$|e^{iy}| = \sqrt{\sigma\omega^2 y + \eta\mu^2 y} = 1$$

Επίσης έν τής (4) έχουμε:

$$|e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x| = e^x, \text{ καθ' όσον } e^x > 0.$$

iii) Άναγκαία. Υποθέτομεν ότι $e^z = 1$, τότε

$$e^x \sigma\eta\eta y = 1 \text{ και } e^x \eta\mu y = 0$$

Έν τής δευτέρας, έφ' όσον $e^x \neq 0$, έχουμε: $\eta\mu y = 0$. Όθεν $y = \eta\pi$, όπου η άκέραιος.

Άλλά $\sigma\eta\eta\eta\pi = (-1)^\eta$. Έφ' όσον όμως $e^x > 0$, θα είναι: $e^x (-1)^\eta = 1$ μόνον άν $x=0$ και $\eta=2k$,
 $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως:

$$z = x + iy = 0 + i\eta\pi = 2k\pi i$$

Ικανή. Υποθέτομεν ότι $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, λόγω τής (5) έχουμε:

$$e^z = e^{2k\pi i} = \sigma\eta\eta(2k\pi) + i\eta\mu(2k\pi) = 1$$

iv) Παρατηρήσατε ότι:

$$e^{z_1} = e^{z_2} \text{ άν, και μόνον άν, } e^{z_1 - z_2} = 1$$

και άπολούθως εφαρμόσατε τήν (iii).

Παρατήρησης. Πολλάκις θέτομεν χάριν εύκολίας:

$$e^z = \exp z$$

§4. ΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Όρισμός II-4-1. Δοθέντος ενός μιγαδικού αριθμού z όρίζομεν:

$$\sigma\eta\eta z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ και } \eta\mu z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1)$$

λαμβάνοντες τό z ως πραγματιuόν αριθμόν λαμβάνομεν άμέσως έν τών άνω-

τέρων τύπων, τούς τύπους (7) της προηγούμενης παραγράφου.

Έν τῶν (1), χρησιμοποιοῦντες πράξεις μέ μιγαδικῆς σειράς, ἔχομεν:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad (2)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad (3)$$

καθώς καί

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (4)$$

Αἱ συναρτήσεις $\cos z$ καί $\sin z$ ὁρίζονται ὑπό τῶν τύπων:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \quad , \quad z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

Ὁρισμός II-4-2. Δοθέντος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z ὁρίζομεν:

$$\cosh z = \cos iz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = -i \sin iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad , \quad z \neq n\pi i$$

Τά ἀναπτύγματα εἰς σειράν δυνάμεων τῶν $\cosh z$ καί $\sinh z$ εἶναι:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

Ἐπίσης, δυνάμεθα εὐλόγως νά ἀποδείξωμεν τούς κατωθι τύπους:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z \pm z_1) = \sinh z \cosh z_1 \pm \cosh z \sinh z_1$$

$$\cosh(z \pm z_1) = \cosh z \cosh z_1 \pm \sinh z \sinh z_1$$

§ 5. Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $\log w$ ¹⁾

Εἰς τήν § 3 ὁρίσαμεν τήν ἐυθετιυή συνάρτησιν e^z . Ἡδη πρὶν ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν $\log w$ εἶναι ἀπαραίτητον νά παραθέσωμεν τὸ κατωθι:

Θεώρημα II-5-1. Ἐάν w εἶναι ἕνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\neq 0$, τότε ὑπάρχει ἕνας μι-

1) Εἰς τήν § 3 τοῦ Κεφ. IV θά ἐπανέλθωμεν δι' ἐντενέστεραν μελέτην.

μιγαδικός αριθμός z τοιοῦτος, ὥστε $e^z = w$ (1). Ένας τοιοῦτος μιγαδικός αριθμός z εἶναι ὁ ἀριθμός

$$\log |w| + i \cdot \arg w$$

καί υἱάθε ἄλλος z δά ἔχει τήν μορφήν:

$$\log |w| + i \cdot \arg w + 2k\pi i, \text{ ὅπου } k: \text{ἀυέραιος}$$

Ἀπόδειξις: Ἐστω $\arg w = \theta$. Ἐπειδή $e^{\log |w| + i \arg w} = e^{\log |w|} \cdot e^{i\theta} = |w| \{\cos \theta + i \sin \theta\} = w$, δά ἔχωμεν $z = \log |w| + i \arg w$, ὡς μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $e^z = w$. Ἐάν z , εἶναι καί μία ἄλλη λύσις τῆς (1), τότε $e^z = e^{z_1}$ ἔξ τῆς $z - z_1 = 2k\pi i$, k : ἀυέραιος. Ὅθεν υἱάθε λύσις τῆς (1) δά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\log |w| + i \cdot \arg w + 2k\pi i, \text{ ὅπου } k: \text{ἀυέραιος.}$$

Ὁρισμός II-5-1. Ἐστω $w \neq 0$ ἕνας μιγαδικός ἀριθμός. Ἐάν z εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός τοιοῦτος, ὥστε $e^z = w$ (1), τότε ὁ z καλεῖται λογαριθμός τοῦ w . Μία μεριμή λύσις τῆς (1) δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$z = \log |w| + i \cdot \arg w \quad (2)$$

καί ἡ ὁποία καλεῖται πρωτεύουσα τιμή τοῦ λογαρίθμου τοῦ w καί δι' αὐτόν τόν z γράφομεν $z = \log w$. Κατωτέρω ἀντί τοῦ w δά θεωροῦμεν τό z .

Θεώρημα II-5-2. Ἐάν $z_1, z_2, \dots, z_n \neq 0$ τότε $\log(z_1, z_2, \dots, z_n) = \log z_1 + \log z_2 + \dots + \log z_n + 2k\pi i$ ὅπου k : ἀυέραιος.

Ἀπόδειξις: Εἶναι $\log(z_1, z_2, \dots, z_n) = \log |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| + i \arg(z_1, z_2, \dots, z_n) = \log |z_1| + \log |z_2| + \dots + \log |z_n| + i [\arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n + 2k\pi] = (\log |z_1| + i \arg z_1) + (\log |z_2| + i \arg z_2) + \dots + (\log |z_n| + i \arg z_n) + 2k\pi i = \log z_1 + \log z_2 + \dots + \log z_n + 2k\pi i$.

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθῇ ὁ $\log(1+i)$.

Λύσις: Εἶναι $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$. Ὅθεν, ἡ πρωτεύουσα τιμή τοῦ λογαρίθμου εἶναι $\log(1+i) = \log \sqrt{2} + i \cdot \frac{\pi}{4}$ καί υἱάθε ἄλλη τιμή αὐτοῦ εἶναι: $\log(1+i) = \log \sqrt{2} + i \cdot \frac{\pi}{4} + 2k\pi i$.

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις

1. Εὑρετε τήν αὐτίνα συγμίσσεως τῶν κατωθι δυναμοσειρῶν:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4}, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n(1+in^2)}, \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n z^n, \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} 4^n (z-2)^n, \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot z^n$$

2. Δείξτε ότι οι κάτωθι δύο σειρές:

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad \text{και} \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \cdot z^{n+1}}{n+1}$$

έχουν τον αυτόν τύπο συρρίξεως.

3. Εάν $\exp z$ συμβολίση το e^z , δείξτε τα κάτωθι:

$$i) \exp \bar{z} = \overline{\exp z}$$

$$ii) \exp(nz) = (\exp z)^n \text{ διά κάθε } n \in \mathbb{Z}$$

$$iii) |\exp(\lambda iz)| = e^{-2\lambda y} \text{ διά κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$iv) \text{ Εάν } \operatorname{Im}(z) > 0, \text{ τότε: } |\exp(iz)| < 1.$$

4. Εάν $z = x + iy$, δείξτε ότι:

$$i) \eta \mu iz = i \sinh y, \sigma \nu iz = \cosh y$$

$$ii) \eta \mu \bar{z} = \overline{\eta \mu z}, \quad \sigma \nu \bar{z} = \overline{\sigma \nu z}$$

$$iii) \sigma \nu z = \sigma \nu x \cosh y - i \eta \mu x \sinh y$$

$$iv) |\eta \mu z|^2 = \sinh^2 y + \eta \mu^2 x$$

5. Δείξτε ότι:

$$\sigma \nu z_2 - \sigma \nu z_1 = -2 \cdot \eta \mu \left(\frac{z_2 + z_1}{2} \right) \eta \mu \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right).$$

6. Δείξτε ότι:

$$\exp \frac{\eta \mu 2x + i \sinh 2y}{\sigma \nu 2x + \cosh 2y}$$

7. Εάν $z = x + iy$, δείξτε ότι:

$$i) \sinh(iz) = i \eta \mu z, \quad \sigma \nu(iz) = \cosh z.$$

$$ii) |\sinh z|^2 = \eta \mu^2 y + \sinh^2 x$$

$$iii) |\cosh z|^2 = \sigma \nu^2 y + \sinh^2 x.$$

8. Δείξτε ότι: εάν $\tanh(x + iy) = u + iv$, ένθα x, y, u, v είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$u = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \sigma \nu 2y}, \quad v = \frac{\eta \mu 2y}{\cosh 2x + \sigma \nu 2y}$$

9. Δείξτε ότι αιρίσαι των εξισώσεων $\eta \mu z = 0$, $\sigma \nu z = 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και εύρατε αυτούς.

10. Να εύρεθούν οι λογάριθμοι των αριθμών α) $1-i$ β) $2+3i$ γ) -1 .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἡ παράγωγος μιᾶς μιγαδικῆς συναρτήσεως ὀρίζεται κατ' ἀνάλογον τρόπον μετὰ τὴν παράγωγον μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως (βλ. σχετ. Τόμος Α' Κεφ. XI).

Ὁρισμός III-1-1. Ἐστω ἡ μονότιμος μιγαδικὴ συνάρτησις $f(z)$ ὠρισμένη εἰς ἕναν τόπον G τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου \mathbb{C} , ὅπου $G \subset \mathbb{C}$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος ἢ ὅτι ἔχει παράγωγον εἰς τὸ σημεῖον $z_0 \in G$, ἐὰν ὑπάρχη τὸ ὅριον

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1)$$

ἀνεξαρτήτως τοῦ δρόμου κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ $z \rightarrow z_0$. καὶ εἶναι τοῦτο (τὸ ὅριον) πεπερασμένος ἀριθμός.

Τὸ ἀνωτέρω ὅριον τὸ συμβολίζομεν οὕτω: $f'(z_0)$ ἢ $\frac{df(z_0)}{dz}$ καὶ καλεῖται παράγωγος τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τὴν θέσιν $z = z_0$.

Τὸ ὅριον (1) γράφεται καὶ οὕτω:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (2), \text{ ὅπου ἑτέθη } \Delta z = z - z_0.$$

Ἐὰν διὰ καθέ $z \in G$ ὑπάρχη ἡ παράγωγος τῆς $f(z)$ ἐν G , τότε ἡ $f(z)$ καλεῖται διαφορίσιμος ἐν G καὶ ἡ παράγωγος συμβολίζεται οὕτω: $f'(z)$ ἢ $\frac{df(z)}{dz}$.

Ὅθεν, ἐξ ὁρισμοῦ

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (3)$$

Ἀποδεικνύεται ἐντελῶς ἀναλόγως ὅπως καὶ εἰς τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις ὅτι:

Πρότασις III-1-1. Ἐὰν ἡ μιγαδικὴ συνάρτησις $f(z)$ ὠρισμένη εἰς τὸν τόπον G διαφορίζεται εἰς τὸ σημεῖον $z_0 \in G$, τότε αὕτη εἶναι καὶ συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον z_0 .

• Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ διαφορίζεται εἰς τὴν θέσιν $z = z_0$. Ὅρισομεν

την συνάρτησιν :

$$g(z, z_0) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{διὰ τὰς } z \in G \text{ καὶ } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{,, } z = z_0. \end{cases}$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) g(z, z_0) \quad \text{διὰ } z \in G \quad (3)$$

Λόγω τῆς κατασκευῆς τῆς $g(z, z_0)$ ἔχομεν :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad (4)$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ἡ πρότασις :

Πρότασις III-1-2. Ἡ ἰσότης καὶ ἀναγκαστικὰ συνδεδειγμένη ἵνα ἡ $f(z)$ διαφορίζεται εἰς τὴν θέσιν $z = z_0$, εἶναι νὰ ὑπάρχη εἰς πεπερασμένον μιγαδικὸς ἀριθμὸς C καὶ μία συνάρτησις $R(z, z_0)$ ὁρισμένη ἐν G καὶ συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $z_0 \in G$ μὲ $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z, z_0) = 0$ (ἢ $R(z_0, z_0) = 0$) τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot C + (z - z_0) R(z, z_0), \quad (5) \quad z \in M$$

Προφανῶς, ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὸ σημεῖον $z = z_0$, τότε $f'(z_0) = C$.

Διὰ τὴν διαφορίσιμον συνάρτησιν $f(z)$ θέτομεν $z = z_0 + h$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (5) ἔχομεν :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h \cdot f'(z_0) + h \cdot Q(z_0, h) \quad (6)$$

ὅπου $\lim_{h \rightarrow 0} Q(z_0, h) = 0$. (ἐτέθη $Q(z_0, h) \equiv R(z_0 + h, z_0)$)

Ἡ $f(z)$ καλεῖται ἀναλυτικὴ ἢ ὁλόμορφος εἰς τὸ σημεῖον z_0 , ἐὰν ὑπάρχη μιὰ περιοχὴ $|z - z_0| < \delta$, ὅπου δι' ὅλα τὰ σημεία ταύτης ὑπάρχει ἡ $f'(z)$.

Ἐὰν ἡ παράγωγος $f'(z)$ ὑπάρχη εἰς πᾶσι σημείοις $z \in G$, τότε ἡ $f(z)$ καλεῖται ὀλομορφικὴ ἢ ὁλόμορφος συνάρτησις εἰς τὸν τόπον G .

Ὅπως καὶ εἰς τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις οὕτω καὶ διὰ τὰς μιγαδικὰς τοιαύτας ἰσχύουν οἱ κατωθί κανόνες παραγωγίσεως.

ι) Ἐὰν f καὶ g εἶναι δύο μιγαδικαὶ συναρτήσεις τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $z \in G$ καὶ διαφορίσιμοι εἰς τὸ σημεῖον z , τότε καὶ αἱ συναρτήσεις $C \cdot f$, $C \in \mathbb{C}$, $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ μὲ $g(z) \neq 0$ εἶναι διαφορίσιμοι εἰς τὸ z καὶ ἰσχύουν :

$$\frac{d(C \cdot f)}{dz} = C \cdot f', \quad \frac{d(f \pm g)}{dz} = f' \pm g', \quad \frac{d(f \cdot g)}{dz} = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \quad g \neq 0.$$

ii) Η παράγωγος σταθεράς είναι μηδέν.

iii) Η συνάρτησις $f(z)=z$ είναι διαφορίσιμος διά υάθε z του μιγαδικού επιπέδου και ισχύει: $(z)'=1$.

iv) Η παράγωγος τῆς $f(z)=z^n$ είναι: $\frac{dz^n}{dz}=n \cdot z^{n-1}$.

v) Ἐάν $h(w)$ είναι μία συνάρτησις ὠρισμένη διά υάθε $w \in f(G)$ και διαφορίσιμος εἰς τὸ σημεῖον $w=f(z)$, τότε και ἡ σύνθετος συνάρτησις $h \circ f$ είναι διαφορίσιμος εἰς τὸ z και ισχύει:

$$\frac{d}{dz}(h \circ f)(z) = \frac{dh(w)}{dw} \cdot \frac{df(z)}{dz}.$$

Παρατήρησις: Ὑπάρχουν και συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι ἀναλυτικαὶ. Ἐνα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα εἶναι ἡ συνάρτησις $f(z)=\bar{z}$ ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἀναλυτικὴ διά υάθε $z \in \mathbb{C}$.

Πράγματι, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου ἔχομεν:

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \Delta \bar{z} - \bar{z}}{\Delta \bar{z}} \quad (1)$$

Θέτοντες $z = x + iy$, ὅτε $\bar{z} = x - iy$ και $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{x - iy + \Delta x - i\Delta y - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \quad (2)$$

Ἐάν $\Delta y = 0$, τὸ ὅριον (2) γίνεται $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Ἐάν $\Delta x = 0$, τότε τὸ ὅριον (2) γίνεται: $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, τὸ ὅριον (2) ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ δρόμου κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ $\Delta z \rightarrow 0$ και ὥς ἐκ τούτου ἡ συνάρτησις $f(z) = \bar{z}$ δὲν ἔχει παράγωγον διά υάθε $z \in \mathbb{C}$, ἥτοι δὲν εἶναι ἀναλυτικὴ ἢ ἄλλως ὁλόμορφος συνάρτησις.

Μία συνάρτησις $f(z)$ καλεῖται ἀπείρως διαφορίσιμος εἰς ἓνα πεδῖον G , ἐάν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $f'(z)$, $f''(z) = \frac{df'(z)}{dz}$, $f'''(z) = \frac{df''(z)}{dz}$, ... διά υάθε $z \in G$.

Βραδύτερον θὰ γνωρίσωμεν συναρτήσεις οἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπείρως διαφορίσιμοι, ὅπως αἱ $f(z) = e^z$, $f(z) = \pi \mu z$, κ.τ.λ.

§2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἐστω ἡ διαφορίσιμος συνάρτησις $w = f(z)$. θεωροῦμεν τὴν διαφορὰν:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) \quad (1).$$

ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι διαφορίσιμος διὰ καθ' ἑκάστην $z \in G \subseteq \mathbb{C}$. ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν ὅρισμόν τῆς παραγώγου, ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\Delta w = f'(z) \cdot \Delta z + \varepsilon(z) \cdot \Delta z \quad (2)$$

ὅπου $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ καθὼς τὸ $\Delta z \rightarrow 0$.

Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἔκφρασις:

$$dw = f'(z) \cdot dz \quad (3)$$

μαθεῖται διαφοριζόν τῆς $w = f(z)$ εἰς τὴν θέσιν z .

Ἐάν $w = z$, τότε $(z)' = 1$ καὶ λόγῳ τῆς (3) ἔχομεν:

$$dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z \quad (4)$$

Ἡ (3), λόγῳ τῆς (4), γράφεται:

$$dw = f'(z) dz \quad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν καὶ τὴν ἔκφρασιν τῆς παραγώγου ὡς πηλίκον διαφοριῶν, ἥτοι:

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz} \quad (6)$$

Ἡ (2), λόγῳ τῆς (5), γράφεται:

$$\Delta w = df(z) + \varepsilon(z) \cdot \Delta z \quad (7)$$

§3. Αἱ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΤΩΝ CAUCHY-RIEMANN.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν δοθείσης μιᾶς μιγαδικῆς συναρτήσεως ποῖαι συνθῆκαι πρέπει νὰ πληροῦνται, ὥστε αὕτη νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ.

Θεώρημα III-3-1. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ὁρισμένη εἰς τὸν τόπον $G \subseteq \mathbb{C}$ τότε, αἱ κατωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι:

α) Ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸν τόπον G .

β) (Συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann). Ὑπάρχουν αἱ μερινοὶ παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y ἐν G καὶ εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸν τόπον G καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Απόδειξις: $\alpha \implies \beta$. Υποθέτομεν ότι υπάρχει η $f'(z)$, τούτο σημαίνει ότι υπάρχει το κάτωθι όριον.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y) - \{u(x, y) + i v(x, y)\}}{\Delta x + i \Delta y} \quad (1)$$

και τό όποϊον είναι ανεξάρτητον του δρόμου κατά τόν όποϊον τά $\Delta x, \Delta y$ τείνουν πρός τό μηδέν.

α) Εάν λάβωμεν $\Delta y = 0$ και $\Delta x \rightarrow 0$, τό άνωτέρω όριον (1) καθίσταται:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \cdot \left[\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

β) Εάν λάβωμεν $\Delta x = 0$ και $\Delta y \rightarrow 0$, τό όριον (1) καθίσταται:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i \cdot \Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right\} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3)$$

Διά νά είναι λοιπόν η $f(z)$ αναλυτική άρκει τά όρια τά διδόμενα υπό των Ισοτήτων (2) και (3) νά είναι ίσα, ήτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

“Για ισχύη η (4), άρκει νά έχωμεν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\beta \implies \alpha$. Έξ υποθέσεως έχομεν ότι αι συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ έχαν μεριώς παραγώγους ως πρός x και y συνεχώς, συνεπώς δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \Delta x \cdot u_x + \Delta y \cdot u_y + h \cdot \varepsilon_1(h) \quad (5)$$

$$\text{και } v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \Delta x \cdot v_x + \Delta y \cdot v_y + h \cdot \varepsilon_2(h) \quad (6)$$

όπου $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ και $\varepsilon_1(h) \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$ καθώς τό $h \rightarrow 0$ (βλ. σχετιωώς Τόμος Β' σελ. 51, απόδειξιν).

Έχοντες ύπ' όψιν τάς σχέσεις (5) και (6) δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) + i \{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)\}}{\Delta x + i \Delta y} \\ &= \frac{\Delta x \cdot u_x + \Delta y \cdot u_y + i \cdot \Delta x \cdot v_x + i \cdot \Delta y \cdot v_y + h \cdot \varepsilon_1(h) + i h \varepsilon_2(h)}{\Delta x + i \Delta y} \quad (7) \end{aligned}$$

Έξ υποθέσεως έχομεν ότι πληρούνται αι συνθήκαι των Cauchy-Riemann

ήτοι $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ και ως έυ τούτου ή σχέσις (7) γράφεται:

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + i v_x + \frac{h \cdot \epsilon_1(h)}{\Delta x + i \Delta y} + \frac{h \cdot \epsilon_2(h)}{\Delta x + i \Delta y} \quad (8)$$

Παρατηρούμεν ότι, καθώς τό $h \rightarrow 0$ θά είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h}{\Delta x + i \Delta y} \{ \epsilon_1(h) + \epsilon_2(h) \} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} | \epsilon_1(h) + \epsilon_2(h) | = 0. \text{ Έυ τής (8) λοι-}$$

πόν λαμβάνομεν:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = u_x + i v_x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\Delta x + i \Delta y} \{ \epsilon_1(h) + \epsilon_2(h) \} = u_x + i v_x. \quad (9)$$

Τό όριον τούτο είναι ανεξάρτητον τού δρόμου πού ακολουθεϊ τό $\Delta z \rightarrow 0$ καθώς τό $h \rightarrow 0$.

Σπουδαία Παρατήρησις: Πληρουμένων τών συνθηκων τών Cauchy-Riemann έυ τής σχέσεως (9) έχομεν:

$$\begin{array}{l} f'(z) = u_x + i v_x \\ f'(z) = v_y - i u_y \end{array} \quad \text{ή} \quad (10)$$

Αι σχέσεις (10) είναι σπουδαϊαι, καθ' ότι δυνάμεθα νά εύρωμεν την παράγωγον μιās αναλυτικης συναρτήσεως έυ τών μεριων παραγωγων τού πραγματιου και μιγαδιου μέρους αυτης.

• Εφαρμογαι 1η/. Νά εξετασθῃ, εάν ή συνάρτησις $f(z) = e^z$ είναι αναλυτική και νά εύρεθῃ ή παράγωγος ταύτης.

Λύσις: ή δοθεϊσα συνάρτησις γράφεται:

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \{ \cos y + i \sin y \} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

$$\text{Είναι δέ } u_x = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, v_x = e^x \sin y, v_y = e^x \cos y.$$

Έυ τών ανωτέρω σχέσεων διαπιστούμεν ότι:

$$u_x = v_y, v_x = -u_y$$

δηλ. πληροῦνται αι συνθηκαι τών Cauchy-Riemann και επί πλέον αι συναρτήσεις u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς.

Όθεν, ή συνάρτησις $f(z) = e^z$ είναι αναλυτική διά καθε $z \in \mathbb{C}$. ή δέ παρά

γινώσκω αὐτὴν δὲ εἶναι:

$$\begin{aligned}\frac{de^z}{dz} &= u_x + i v_x = e^x \sin y + i e^x \eta \mu y = e^x \{ \sin y + i \eta \mu y \} = \\ &= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.\end{aligned}$$

29/. Δείξτε ὅτι, ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἓνα πεδίου G καὶ ἐὰν ἡ $|f(z)|$ εἶναι σταθερὰ ἐντὸς τοῦ G , τότε ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερὰ ἐντὸς τοῦ G .

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $|f(z)| \equiv 0$ ἐν G , τότε προφανῶς $f(z) \equiv 0$ ἐν G . Ἐστω ἡ $|f(z)| \equiv M > 0$ ἐν G , τότε δὲ ἔχουμεν:

$$|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y) \equiv M^2 \quad (1)$$

ὅπου $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$. Διαφορίζοντες τὴν (1) ὡς πρὸς x καὶ y λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned}u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned} \right\} \quad (2) \text{ διὰ } (x,y) \in G$$

Αἱ συναρτήσεις u καὶ v δὲν δύνανται νὰ μηδενίζονται συγχρόνως ἐν G ἐπειδὴ $u^2 + v^2 = M^2 > 0$. Ἡ ὀρίζουσα λοιπὸν τοῦ συστήματος (2) δὲ πρέπει νὰ εἶναι $\equiv 0$ ἥτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ $f(z)$ ὡς ἀναλυτικὴ δὲ ἱκανοποιῇ τὰς συνθήκας τῶν Cauchy - Riemann. ἥτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4) \text{ παντοῦ ἐν } G.$$

Ἐν τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

Διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (5) δὲ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

καὶ λόγῳ τῶν (4) καὶ τῶν (6) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7) \text{ παντοῦ ἐν } G.$$

Λόγῳ τῶν (6) καὶ (7) ἔχομεν:

$u(x,y) = C_1$ καὶ $v(x,y) = C_2$ παντοῦ ἐν G , ὅπου C_1, C_2 σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Άρα $f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = C_1 + i \cdot C_2$ (σταθερά).

• Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι, $\frac{de^z}{dz} = e^z$, τούς τύπους της § 4 του Κεφ. II τούς όρίζοντας τούς τριγωνομετρικούς άριθμούς καθώς καί τούς κανόνες της παραγωγίσεως, εύκολως διαπιστούμεν ότι:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \frac{d\eta\mu z}{dz} = \sigma\upsilon\nu z & \text{ii)} \frac{d\sigma\upsilon\nu z}{dz} = -\eta\mu z & \text{iii)} \frac{d\epsilon\phi z}{dz} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 z} \\ \text{iv)} \frac{d\sinh z}{dz} = \cosh z & \text{v)} \frac{d\cosh z}{dz} = \sinh z & \text{vi)} \frac{d\tanh z}{dz} = \frac{1}{\cosh^2 z} \end{array}$$

§ 4. ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έάν ή $f(z) \equiv u(x,y) + i v(x,y)$ είναι αναλυτική συνάρτησις, τότε αί $u(x,y)$ καί $v(x,y)$ καλούνται συζυγείς συναρτήσεις. Έπειδή αί συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ ικανοποιούν τās συνθήκας τών Cauchy-Riemann, θα έχωμεν:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Όθεν,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Συνεπώς:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})$$

καί

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Αναλόγως έχομεν:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Έν τών (1) καί (2) συμπεραίνομεν ότι, αί συζυγείς συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ ικανοποιούν τήν διαφ. Είσιωσιν του Laplace, ήτοι είναι άρμονι-καί συναρτήσεις.

• Παραδείγματα 1^η Δίδονται αί συναρτήσεις $u = x^3 - 3xy^2$ καί $v = 3x^2y - y^3$.

Δείξατε ότι αὐταί είναι συζυγείς καί άπολούθως εύρατε τήν αναλυτικήν συνάρτησιν έν τής όποίας προϋπτον

Λύσις: Είναι $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Διαπιστούμεν ότι αί συνθήκαι τών Cauchy-Riemann επαληθεύονται. Όθεν αί δοθεΐσαι συναρτήσεις είναι συζυγείς. Η όρισμένη υπ' αὐτών ανα-

- λυτιμή συνάρτησις $f(z)$ είναι $f(z) = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = z^3$.
- 2^{ος} Να εὑρεθoῦν ὅλες οἱ ἄρμονιες συναρτήσεις τοῦ τύπου $u = f(x^2 + y^2)$.

Λύση: Αὐτές δά πρέπει νά ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση τοῦ Laplace ἥτοι:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Θέτομεν: $t = x^2 + y^2$ καί ἔχομεν $t = t(x, y)$. Θά εἶναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t) \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t) \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (3)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 \right] f''(t) + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) f'(t) = 0 \quad \text{ἢ} \quad t \cdot f''(t) + f'(t) = 0 \quad (4)$$

Ἡ (4) εἶναι διαφ. ἐξίσωση τοῦ Euler καί ὁλοκληρουμένη κατὰ τὰ γνωστά δίδει τήν λύση: $f(t) = C_1 \log t + C_2$ (5) ἢ $u = f(x^2 + y^2) = C_1 \log(x^2 + y^2) + C_2$.

- Πρόβλημα: Ἐστω ἡ συνάρτησις $u(x, y) = x^2 - y^2$. Νά κατασκευασθῇ ἡ συζυγής ταύτης.

Λύσις: Ἐστω $v(x, y)$ ἡ συζυγής τῆς δοθείσης. Αὐταί δά ἱκανοποιοῦν τάς ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ἢ} \\ 2x &= \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{καί} \quad -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) λαμβάνομεν:

$v(x, y) = 2xy + \varphi(x)$ (2), ὅπου $\varphi(x)$ αὐθαίρετος συνάρτησις τοῦ x . Πρέπει δέ ἡ συνάρτησις (2) νά ἐπαληθεύη καί τήν δευτέραν τῶν (1), ἥτοι:

$$-2y = -\frac{\partial}{\partial x} \{ 2xy + \varphi(x) \} \quad \text{ἢ} \quad 2y = 2y + \varphi'(x).$$

Συνεπῶς $\varphi'(x) = 0$, ἐξ ἧς $\varphi(x) = C$, ὅπου C αὐθαίρετος σταθερά.

Ὅθεν, ἡ ζητούμενη συνάρτησις εἶναι $v(x, y) = 2xy + C$.

§ 5 ΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΤΩΝ CAUCHY-RIEMANN ὑΠΟ ΠΟΛΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ.

Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν $w = f(z)$, ὅπου $z = x + iy$.

Θεωρούμε πολυδιάς συνεταχμένες (z, θ) δά ἔχωμεν ὡς γνωστόν :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

$$\text{ὅπου } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{καὶ } \theta = \text{τοξ. εφ.}(y/x).$$

θά δυνάμεθα νά γράψωμεν ἐν προειμένῳ

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \cdot e^{i\theta} \quad (2),$$

τό δέ πραγματιῶν καὶ τό φανταστιῶν μέρος τῆς $w = f(z) = u + iv$ δύνανται νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσεσι τῶν x καὶ y ἢ τῶν r καὶ θ .

Ἐφαρμόζοντες τοὺς κανόνους παραγωγίσεως πραγματιῆς συναρτήσεως δύο πραγματιῶν μεταβλητῶν ἐπιτυχάνομεν ὥστε αἱ πρῶται μερὶ καὶ παράγωγοι τῶν u καὶ v ὡς πρὸς x καὶ y νά εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ (x, y) εἰς ἓνα σημεῖον μὴ μηδενίσου ταύτας, ἐάν αἱ πρῶται μερὶ καὶ παράγωγοι ὡς πρὸς r καὶ θ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ (r, θ) εἰς αὐτό τό σημεῖον καὶ ἀντιστρόφως. Πράγματι,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta \quad (4).$$

κατ' ἀναλόγιαν ἔχομεν :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \theta \quad (6)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ἔχομεν, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τὰς (3) καὶ (6) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sin \theta = 0 \quad (7)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῶν Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ἔχομεν, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τὰς (4) καὶ (5) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \theta = 0 \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (7) ἐπὶ $\sin \theta$ καὶ τὴν (8) ἐπὶ $\cos \theta$ καὶ προσθέτοντες

λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \eta \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (9)$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν (7) επί $-\eta\mu\theta$ και τήν (8) επί $\sigma\upsilon\eta\theta$ και προσθέτοντες λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \eta \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (10)$$

Ώστε αι συνθηκαι των Cauchy-Riemann εις πολυιάς συντεταγμένας είναι αι εξισώσεις (9) και (10) και τας οποίας επαναλαμβάνομεν υατωτέρω.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}} \quad (11)$$

• Βάσει των τύπων (10) της §3 ἔχομεν:

$$f'(z) = u_x + i v_x \quad (12)$$

Λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν και τούς τύπους (3) και (5), τούς συνδέοντας τας καρτεσιανάς και πολυιάς συντεταγμένας και τόν τύπον (10) της §3 ἔχομεν:

$$f'(z) = \left\{ u_\tau \sigma\upsilon\eta\theta - \frac{1}{\tau} u_\theta \eta\mu\theta \right\} + i \left\{ v_\tau \sigma\upsilon\eta\theta - \frac{1}{\tau} v_\theta \eta\mu\theta \right\} \quad (13)$$

Βάσει δέ των συνθηκων (11) των Cauchy-Riemann η (13) γίνεται:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left\{ \frac{1}{\tau} v_\theta \sigma\upsilon\eta\theta - \frac{1}{\tau} u_\theta \eta\mu\theta \right\} + i \left\{ -\frac{1}{\tau} u_\theta \sigma\upsilon\eta\theta - \frac{1}{\tau} v_\theta \eta\mu\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\tau} v_\theta (\sigma\upsilon\eta\theta - i\eta\mu\theta) - \frac{1}{\tau} u_\theta (\sigma\upsilon\eta\theta - i\eta\mu\theta) = \frac{(\sigma\upsilon\eta\theta - i\eta\mu\theta)}{\tau} (v_\theta - i u_\theta) = \frac{e^{-i\theta}}{\tau} \cdot (v_\theta - i u_\theta). \end{aligned}$$

Ώθεν,

$$\boxed{f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{\tau} \cdot (v_\theta - i u_\theta).} \quad (14)$$

• Εφαρμογή: Νά εύρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\tau \cdot e^{i\theta}}$$

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι, $u(\tau, \theta) = \frac{\sigma\upsilon\eta\theta}{\tau}$, $v(\tau, \theta) = -\frac{\eta\mu\theta}{\tau}$ και ὅτι αι συνθηκαι των Cauchy-Riemann εις πολυιάς συντεταγμένας πληροῦνται εις καθε σημειον z τοῦ μιγαδικου επιπέδου διαφορου τοῦ μηδενός. Ώθεν, ὑπάρχει ἡ παράγωγος τῆς $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\tau \cdot e^{i\theta}}$. Συμφώνως πρὸς τόν τύπον (14) δά ἔχωμεν:

$$f'(z) = e^{-i\theta} \cdot \left(-\frac{\sigma\upsilon\eta\theta}{\tau^2} + i \frac{\eta\mu\theta}{\tau^2} \right) = -\frac{1}{(\tau e^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

§6. ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΑΙ

"Εστω $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$ μία μιγαδική συνάρτησις τῶν δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καὶ y . Υποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$ καὶ εἶναι συνεχεῖς. Ὡς ἐκ τούτου ὑπάρχει τὸ ὁλοκλινὸν διαφορικὸν τῆς $f(x, y)$ καὶ εἶναι:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$dz = dx + i dy \quad \text{καὶ} \quad d\bar{z} = dx - i dy \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$dx = \frac{1}{2} (dz + d\bar{z}) \quad \text{καὶ} \quad dy = \frac{1}{2i} (dz - d\bar{z}) \quad (2')$$

Εἰσάγοντες τὰς ἐκφράσεις τῶν dx καὶ dy ἐκ τῶν (2') εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν:

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \quad (3)$$

"Ἡδὴ εἰσάγομεν τοὺς κατωθι διαφορικοὺς τελεστάς

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς ἀνωτέρω τελεστάς εἰς τὴν συνάρτησιν f ἡ σχέσις (3) γράφεται:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (5)$$

Ἐξ ἄλλου μέ τὴν εἰσαγωγὴν αὐτῶν τῶν τελεστῶν ἡ συνθήκη τῶν Cauchy-Riemann γράφεται ὑπὸ τὴν κατωθι ἀπλὴν μορφήν:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0} \quad (6)$$

Ἡ ἰσότης (6) ἐκφράζει τὴν ἰσάνην καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα μία συνάρτησις εἶναι ἀναλυτικὴ.

"Ἐνεκα τῆς (6) ἢ (5) γράφεται: $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ (7)

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: $df = f'(z) dz$ (8)

Ὅθεν, λόγῳ τῶν (7) καὶ (8) ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}} \quad (9)$$

Εφαρμογή: Νά εξετασθῇ, ἐάν ἡ συνάρτησις $\alpha\tau\eta z$ εἶναι ἀναλυτικὴ, ὑποθέτοντες ὅτι τὸ z κινεῖται ἐντὸς τοῦ πρωτεύοντος χωρίου:

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι: (βλ. κεφ. IV, § 3).

$$\log z = \log |z| + i \alpha\tau\eta z = \frac{1}{2} \log z \cdot \bar{z} + i \alpha\tau\eta z \quad (1)$$

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ $\log z$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις, βλ. σθ. 71 παραγωγίζοντες τὴν (1) ὡς πρὸς \bar{z} λαμβάνομεν:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z \cdot \bar{z}} + i \frac{\partial \alpha\tau\eta z}{\partial \bar{z}} \quad \text{ἢ} \quad 0 = \frac{1}{2\bar{z}} + i \frac{\partial \alpha\tau\eta z}{\partial \bar{z}}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\partial \alpha\tau\eta z}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i\bar{z}} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν πληροῦται ἡ συνθήκη (6), καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ συνάρτησις $\alpha\tau\eta z$ δὲν εἶναι ἀναλυτικὴ.

• Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς ἐνός πεδίου D , ὡς γνωστόν θὰ εἶναι καὶ ἀπείρως παραγωγίσιμος ἐν D , καὶ ὡς ἐκ τούτου καὶ ἡ $\frac{df}{dz}$ θὰ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐν D .

$$\text{Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν: } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{συντόμως } \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial \bar{z}} = 0$$

$$\text{Ὀμοίως θὰ εἶναι } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{ἢ} \quad \text{συντόμως } \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$$

• Ἡ διαφορικὰ τελεστὰ οἱ δειδόμενοι ὑπὸ τῶν τύπων (4) ἐφαρμοδόμενοι διαδοχικῶς εἰς τὴν συνάρτησιν $f(z)$ δίδουν:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

Θέτοντες $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (ὁ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ εἶναι ὁ γνωστός διαφορικὸς τελεστής τοῦ Laplace)

ὁ (10) γράφεται

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} \quad (11)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ, τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = 0$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

Αἱ λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξίσωσως (12) εἶναι αἰ λεγόμεναι ἀρμονικαὶ συναρτήσεις.

Ἐπειδὴ $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ἡ διαφ. ἐξίσωσις (12) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὰς ἐξισώσεις

$$\Delta f = 0 \iff \begin{cases} \Delta u = 0 \\ \Delta v = 0 \end{cases} \quad (13)$$

§ 7. ΚΑΝΩΝ L' HOSPITAL

Θεώρημα III-7-1. Έάν αι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ είναι αναλυτικές εις τό σημείον z_0 και είναι $f(z_0) = g(z_0) = 0$, ενώ $g'(z_0) \neq 0$, τότε ισχύει:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Απόδειξις: Έγ' όσον αι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ είναι αναλυτικές εις τό z_0 , συμφώνως πρός τήν πρότασιν 1-9-2 έχομεν:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + (z - z_0) \cdot R_1(z, z_0) \\ &= (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) R_1(z, z_0), \text{ όπου } \lim_{z \rightarrow z_0} R_1(z, z_0) = 0. \end{aligned}$$

Όμοίως: $g(z) = (z - z_0) g'(z_0) + (z - z_0) R_2(z, z_0)$, όπου $\lim_{z \rightarrow z_0} R_2(z, z_0) = 0$

$$\text{Όθεν, } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0) \{f'(z_0) + R_1(z, z_0)\}}{(z - z_0) \{g'(z_0) + R_2(z, z_0)\}}$$

$$= \frac{f'(z_0) + \lim_{z \rightarrow z_0} R_1(z, z_0)}{g'(z_0) + \lim_{z \rightarrow z_0} R_2(z, z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

• Εφαρμογή: Νά υπολογισθῇ τό όριον: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin z}{z^2}$.

Λύσις: Είναι $f(z) = 1 - \sin z$, $g(z) = z^2$ και $f(0) = g(0) = 0$.

Επίσης αι $f(z)$ και $g(z)$ είναι αναλυτικές εις τό $z = 0$.

Δι' εφαρμογῆς τοῦ κανόνος τοῦ L'Hospital έχομεν:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\eta \mu z}{2z}$$

Επειδή $f_1(z) = \eta \mu z$ και $g_1(z) = 2z$ είναι αναλυτικές και ἴσαι πρός τό μηδέν όταν $z = 0$, δυνάμεθα ἐν νέου νά ἐφαρμόσωμεν τόν κανόνα τοῦ L'Hospital ὅτε έχομεν:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\eta \mu z}{2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$$

Όθεν,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

§8. ΚΑΜΠΥΛΑΙ ΤΟΥ JORDAN - ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΙΚΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Ἐστωσαν $x(t)$ καὶ $y(t)$ εἶναι πραγματικαὶ συναρτήσεις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς t , τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς διὰ $t_1 \leq t \leq t_2$. Αἱ ἐξισώσεις ὡς γνωστόν, ὁρίζουν εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy μίαν (συνεχῆ) καμπύλην (γ) . Εἰς δὲ τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον ἡ παραμετρικὴ ἐξίσωσις $z = x + iy = x(t) + iy(t) = z(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ ὁρίσῃ τὴν αὐτὴν καμπύλην (γ) .

Παραδείγματα: 1^ο/. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων z_1, z_2 εἶναι $z = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t$ ὅπου $t \in \mathbb{R}$.

2^ο/. Ἡ ἐξίσωσις τῆς περιφέρειας κέντρου z_0 καὶ ἀκτίνας ρ εἶναι: $z = z_0 + \rho e^{it}$, ὅπου $0 \leq t < 2\pi$.

Ἐάν αἱ $x(t), y(t)$ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους διὰ $t_1 \leq t \leq t_2$ - ὅτε καὶ ἡ $z(t)$ ἔχει συνεχὴ παράγωγον - καὶ εἶναι ἐπὶ πᾶσιν $x'(t) + y'(t) \neq 0$, ὡς γνωστόν, ἡ ὁρίσασθαι καμπύλη καλεῖται *λεία*.

Ἡ καμπύλη C μέ ἐξισώσιν $z = z(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ θὰ καλεῖται *καμπύλη τοῦ Jordan*, ἐάν διὰ $t_1 \neq t_2 \implies z(t_1) \neq z(t_2)$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, κἀκεῖ καλεῖται καμπύλη τοῦ Jordan C χωρίζει τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο διάφορα ἀλλήλων πεδία τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν σύνορον τὴν C καὶ ἐπὶ πᾶσιν τὸ ἓνα ἐκ αὐτῶν εἶναι φραγμένον καλούμενον *ἐσωτερικόν* τῆς C καὶ τὸ ἄλλο εἶναι μὴ φραγμένον καλούμενον *ἐξωτερικόν* τῆς C .

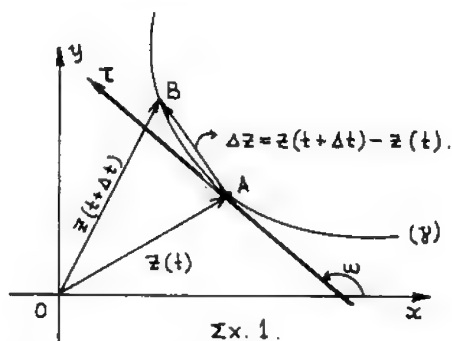
Ἐάν $z(t)$ καὶ $z(t + \Delta t)$ παριστοῦν τὰ διανύσματα θέσεως τῶν σημείων A καὶ B ἀντιστοίχως (βλ. Σχ. 1), τότε ὁ λόγος:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

παριστᾷ ἓνα διάνυσμα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\Delta z = \overrightarrow{AB}$.

Ἐάν τὸ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}$ ὑπάρξη, τότε τὸ ὄριον τοῦτο εἶναι ἓνα διάνυσμα ἑστω τ , κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς (γ) εἰς τὸ σημεῖον A καὶ δίδεται τοῦτο ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}$$



τούτο, δηλ. τό τ υαλρείται έφαπτομενιόν διάνυσμα τής (γ) εἰς τό A .

Ἐάν ω εἶναι τό $\alpha\tau g z'(t)$, δηλ. τό ὄρισμα τοῦ έφαπτομενιοῦ διανύσματος τ (μέ ἄλλους λόγους ἢ γωνία τούτου μετά τοῦ ἄξονος ox), τότε θά ἔχωμεν:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha\tau g \Delta z.$$

ἢ ἐπειδή τοῦ $\Delta t \rightarrow 0$ καί τό $\Delta z \rightarrow 0$ ἡ ἀνωτέρω σχέσηις γράφεται:

$$\omega = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha\tau g \Delta z.$$

Συμπληρώματα καί ἀσκήσεις.

1. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ ὁρισμοῦ εὑρετε τήν παράγωγον ἐιάστης τῶν κατωδι συναρτήσεων:

i). $f(z) = 3z^2 + iz - 2 + 3i$ διά $z = 1$

ii) $f(z) = \frac{3z+1}{z-2i}$ διά $z = -i$

2. Ἐάν $w = f(z) = z^3 - 5z^2$ εὑρετε i) Δw , ii) dw , iii) $\Delta w - dw$.

3. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου δείξατε ὅτι αἱ κατωδι συναρτήσεις δέν εἶναι ἀναλυτικαί διά $z \in \mathbb{C}$.

i). $f(z) = \operatorname{Re} z$, ii). $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$, iii) $f(z) = |z|$.

4. Δί εφαρμογῆς τῶν συνθηκῶν Cauchy - Riemann προσδιορίσατε ποῖαι ἐκ τῶν κατωδι συναρτήσεων εἶναι ἀναλυτικαί:

i). $f(z) = \bar{z}$, ii) $f(z) = z^3$, iii) $f(z) = z \cdot e^{\bar{z}}$.

5. Δείξατε ὅτι αἱ συναρτήσεις: $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ εἶναι συζυγεῖς καί ἀμοιούδως σχεδιάσατε τάς οἰογενείας τῶν καμπύλων μέ $u = \text{σταθ.}$ καί $v = \text{σταθ.}$

6. Κατασκευάσατε, ἐάν εἶναι δυνατόν, τήν συζυγή ἐιάστης τῶν κατωδι συναρτήσεων.

i) $u(x, y) = 2x(1-y)$ ii) $u(x, y) = x \sin y - y \eta \mu y$ iii) $u(x, y) = \sinh x \cdot \eta \mu y$

iv) $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ v) $v(x, y) = \log(x^2 + y^2) + x - 2y$.

7. Εάν $u_1(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ και $u_2(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ δείξτε ότι:

$$f'(z) = u_1(z, 0) - i u_2(z, 0).$$

8. Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπον:

$$f(z) = \begin{cases} |z|^{-1} (1+i) \log z^2 & \text{διό } z \neq 0 \\ 0 & \text{» } z = 0 \end{cases}$$

Επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες των Cauchy-Riemann εις το σημείο $z=0$. Η $f(z)$ είναι διαφορίσιμος εις το $z=0$;

9. Επαληθεύστε ότι η $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ είναι διαφορίσιμος μόνον εις το $z=0$.

10. Δείξτε ότι, το πραγματιόν και τό μιγαδιόν μέρος μιᾶς αναλυτικής συναρτήσεως μιγαδικῆς μεταβλητῆς, όταν ἐμφράσεται αὕτη ὑπό πολυτῆν μορφήν, ικανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

(ἐξίσωσις τοῦ Laplace ὑπό πολυτῆν μορφήν)

11. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἓνα πεδίον G καὶ ἄς θεωρήσωμεν τὰς οἰσογενείας τῶν ἐπιπέδων καμπύλων $u(x, y) = C_1$ καὶ $v(x, y) = C_2$, ὅπου C_1 καὶ C_2 εἶναι αὐθαίρετοι σταθεραί. Δείξτε ὅτι αἱ οἰσογένειαι αὗται εἶναι ὀρθογώνιοι. Ἀκριβέστερον δείξτε ὅτι, ἐάν $Z_0 = (x_0, y_0)$ εἶναι ἓνα κοινόν σημεῖον τῶν δύο καμπύλων $u(x, y) = C_1$ καὶ $v(x, y) = C_2$ καὶ ἐάν $f'(Z_0) \neq 0$, τότε τὰ ἐφαπτομενικά διανύσματα τῶν δύο καμπύλων εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) εἶναι κἀθετά μεταξὺ τῶν.

12. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ κατωθι ὅρια:

i) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\eta \mu z^2}$, ii) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \eta \mu z}{z^3}$, iii) $\lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{1/z^2}$

iv) $\lim_{z \rightarrow m\pi i} (z - m\pi i) \left(\frac{e^z}{\eta \mu z} \right)$ v) $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu z}{z} \right)^{1/z^2}$

13. Τι παριστούν γεωμετρινῶς αἱ κάτωθι σχέσεις:

- i) $|z - z_0| < R$, ii) $|z - z_0| > R$, iii) $|z - z_0| = R$,
 iv) $|z - 2| + |z + 2| = 5$, v) $|z - 2| - |z + 2| > 3$,
 vi) $\operatorname{Re} z \geq c$, vii) $\operatorname{Im} z < c$, viii) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$,
 ix) $\alpha < \arg z < \beta$, x) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$, xi) $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$
 xii) α) $|z| < \arg z$, ἐάν $0 \leq \arg z < 2\pi$
 β) $|z| < \arg z$, ἐάν $0 < \arg z \leq 2\pi$
 xiii) α) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = c$, β) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = c$ ($-\infty < c < +\infty$)
 xiv) α) $\operatorname{Re} z^2 = c$, β) $\operatorname{Im} z^2 = c$ ($-\infty < c < +\infty$).

14. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν κάτωθι γραμμῶν:

- α) Τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων $z_1 = 2 - 3i$ καὶ $z_2 = 3 + 5i$.
 β) Τῆς περιφέρειας μέ κέντρον τό $z_0 = 5 + i$ καὶ αὐτίνα $\rho = 4$.
 γ) Τῆς ἐλλείψεως μέ ἐστίας τὰ σημεία $z_1 = -3$ καὶ $z_2 = +3$ καὶ μεγάλου ἄξονα 10.

15. Δείξατε ὅτι ἡ $f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$ εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ ἐκτός ἀπὸ τὸν δεξιὸν πραγματικὸν ἄξονα καὶ τὴν ἀρχήν.

16. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $u(r, \theta) = \log r$, εἶναι ἁρμονικὴ εἰς τὸ πεδίου $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$. Ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῇ μία ἁρμονικὴ συζυγὴς v .

17. Νά εὑρεθοῦν ὅλες αἱ ἁρμονικὲς συναρτήσεις τῆς μορφῆς:

- i) $u = f(x, y)$, ii) $u = f(y/x)$, iii) $u = f(x^2 + y^2)$ iv) $u = f\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$,
 v) $u = f\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

18. Δίδεται ἡ συνάρτησις $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Δείξατε ὅτι:

- α) Ἐάν δι' ὅλα τὰ z ὑπάρχει τὸ ὅριον $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right]$, τότε αἱ μερμαὶ παράγωγοι u_x, u_y ὑπάρχουν καὶ εἶναι ἴσαι.
 β) Ἐάν τὸ ὅριον $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\operatorname{Im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right]$ ὑπάρχει, τότε αἱ μερμαὶ παράγωγοι u_y, u_x ὑπάρχουν καὶ εἶναι $u_y = -u_x$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΛΕΙΟΤΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ

§1 ΠΕΔΙΟΝ ΟΠΟΥ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΠΛΗ

Όρισμός IV-1-1. Μία συνάρτησις $f(z)$ ὡρισμένη εἰς ἓνα πεδῖον G θά λέγῃμεν ὅτι εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ ἐντὸς τοῦ G , ἐὰν αὕτη δημιουργῇ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ G καὶ τῶν σημείων τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῆς $f(G) = E$ καὶ ἐπὶ πλεον αὕτη εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τοῦ G .

Ἀποδεικνύεται ὅτι: ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ ἐντὸς τοῦ G , τότε θά εἶναι $f'(z) \neq 0$ διὰ καθε $z \in G$.

Παραθέτομεν, ἄνευ ἀποδείξεως, τὸ κατωθὶ θεώρημα:

Θεώρημα IV-1-1. Ἐστω ἡ συνάρτησις $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ ἐντὸς τοῦ πεδίου G καὶ ἔστω $E = f(G)$ ἡ εἰκὼν τοῦ G διὰ τῆς $f(z)$, τότε τὸ E εἶναι καὶ αὐτὸ ἓνα πεδῖον.

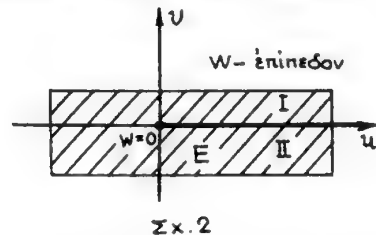
Ἰσχύει καὶ τὸ κατωθὶ βασικὸν θεώρημα ποὺ συνδέει τὰς παραγώγους μιᾶς συναρτήσεως καὶ τῆς ἀντιστρέφου τῆς.

Θεώρημα IV-1-2. Ἐστω ἡ συνάρτησις $w = f(z)$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ ἐντὸς τοῦ G καὶ ἔστω $E = f(G)$ τὸ πεδῖον τῶν τιμῶν τῆς. Ἐστω δὲ $z = \varphi(w)$ ἡ ἀντίστροφος ταύτης. Τότε ἡ $z = \varphi(w)$ εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ ἐντὸς τοῦ E καὶ ἐπὶ πλεον ἰσχύει:

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Ἀπόδειξις: Ἡ ἀντίστροφος $z = \varphi(w)$ ὡς ὠρίσθη εἰς τὴν § 7, Κεφ. I εἶναι καὶ αὐτὴ μονότιμος καὶ ἀμφιμονοσήμαντος ἐντὸς τοῦ E , ἐπειδὴ ἡ $w = f(z)$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐντὸς τοῦ G . Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἀναλυτικὴ. Πρὸς τοῦτοις ἔστωσαν w_0 καὶ w δύο τυχόντα σημεία τοῦ E καὶ z_0 καὶ z τὰ ἀντίστοιχα τούτων ὑπὸ τῆς $\varphi(w)$ ἐντὸς τοῦ G . Ἐπειδὴ ἡ $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ εἶναι ἀνα-

εἰς τὸ W -ἐπίπεδον. Διάφορα ἀλλήλων ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτοῦ τοῦ τομέως ἀπεικονίζονται εἰς διάφορα ἀλλήλων σημεῖα τοῦ W -ἐπιπέδου, τὰ δὲ σύνορα I καὶ II τοῦ ἀνωτέρω τομέως ἀπεικονίζονται εἰς τὸν θετικόν ἡμιᾶξονα u τοῦ W -ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 2). Οὕτω, ὁ ἀνωτέρω τομεὺς ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπενεταμένον W -ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἄς καλέσωμεν E .

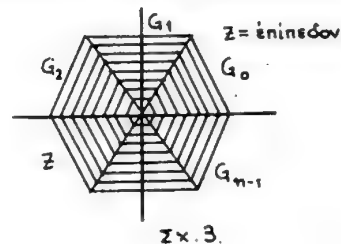


Ἡ ἀντίστροφος τῆς $w = z^n$ εἶναι αὐριβῶς ἢ $z = \sqrt[n]{w}$ (3), ὅτλ. ἡ $n^{\text{α}} \sqrt[n]{}$ ρίζα τοῦ w , ἡ ὁποία εἶναι μία καὶ μόνον, μένει δὲ τιμῶν τὸν τομέα $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ τοῦ z -ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι, ἡ συνάρτησις $z = \sqrt[n]{w}$ εἶναι μονοσήμαντος ἐν E καὶ ὡς ἐν τούτῳ δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα IV-1-2. Οὕτω:

$$\frac{d\sqrt[n]{w}}{dw} = \frac{1}{\frac{dz^n}{dz}} = \frac{1}{n \cdot z^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{w}}{n \cdot w} = \frac{1}{n} \cdot w^{\frac{1}{n}-1}$$

II. Κλάδοι τῆς συναρτήσεως $z = \sqrt[n]{w}$. Ἄς θεωρήσωμεν εἰς τὸ z -ἐπίπεδον τὰς αὐτῆς πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἔχοντος n -κορυφὰς (βλ. Σχ. 3).



Ὁ τομεὺς $\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{4\pi}{n}$ ἀπεικονίζεται ἐπίσης εἰς τὸ W -ἐπίπεδον κ.τ.λ. Ὅθεν ἡ γεωμετρικὴ εἰκὼν τῆς συναρτήσεως $w = z^n$ εἶναι τὸ W -ἐπίπεδον ἐπαναλαμβανόμενον n -φορὰς. Οὕτω ἡ ἀπεικόνισις τοῦ z -ἐπιπέδου ὑπὸ τῆς $w = z^n$ δὲν ἀντιστρέφεται ἀμφιμονοσημάντως.

Ἄν παραστήσωμεν τοὺς ἀνωτέρω γωνιακοὺς τομεῖς, ἕκαστος γωνίας $\frac{2\pi}{n}$, διὰ $G_0, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ ἀντιστοιχῶς, τότε ὁ G_k εἶναι ὁ τομεὺς:

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} \quad (4) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω ἡ εἰκὼν τοῦ G_k ὑπὸ τῆς $w = z^n$ εἶναι τὸ W -ἐπίπεδον καὶ ἕκαστον τῶν n -πεδίων $G_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ἀπεικονίζεται ὑπὸ τῆς $w = z^n$ εἰς τὸ W -ἐπίπεδον. Τὰ δὲ σύνορα τῶν ἀνωτέρω τομέων ἀπεικονίζονται εἰς τὸν θετικόν ἡμιᾶξονα τοῦ ἀνωτέρω W -ἐπιπέδου. Τοῦτο δικαιολογεῖται ὡς ἀπολούδως: Ἐν τῆς (4) ἔχομεν:

$$2k\pi < n \cdot \arg z < 2(k+1)\pi \quad (5)$$

Ἐπειδὴ $\arg w = \arg z^n = n \cdot \arg z$, ἡ (5) γράφεται:

$$2k\pi < \arg w < 2(k+1)\pi \quad (6), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Ἡ (6) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $0 < \arg w < 2\pi$ (7) ὅταν $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Εν τῆς (7) ἔπεται τὸ ἀνωτέρω συμπέρασμα.

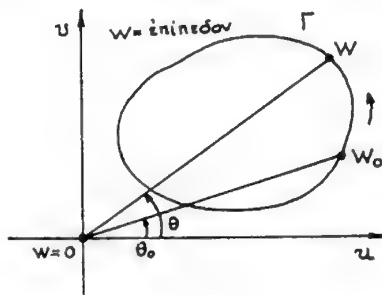
Ἡ συνάρτησις $w = z^n$ μὲ πεδίων ὁρισμοῦ τὸ G_k καὶ πεδίου τιμῶν τὸ w -ἐπίπεδον ἔχει μίαν μονότιμον συνάρτησιν - καὶ μάλιστα ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλή - ὡς ἀντιστροφος, μὲ πεδίων ὁρισμοῦ τὸ w -ἐπίπεδον καὶ πεδίων τιμῶν τὸ G_k . Αὕτῃ ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις συμβολίζεται διὰ τοῦ συμβόλου $z = (\sqrt[n]{w})_k$. Οὕτω ἡ συνάρτησις ἡ θεωρηθεῖσα εἰς τὴν ὑπό- § I τῆς παρούσης. § ἢ $z = \sqrt[n]{w}$ θὰ παρίσταται οὕτω $z = (\sqrt[n]{w})_0$. Ὅθεν διὰ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ἔχομεν τὰς n τὸ πλήθος συναρτήσεις, ἥτοι τὰς ὑάτωδι:

$$(\sqrt[n]{w})_0, (\sqrt[n]{w})_1, (\sqrt[n]{w})_2, \dots, (\sqrt[n]{w})_{n-1} \quad (7)$$

αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς "τμήματα" τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z = \sqrt[n]{w}$ καὶ αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *πρῶταί ρίζαι* τοῦ w . Αἱ διάφοροι συναρτήσεις αἱ δίδόμεναι ὑπὸ τῶν σχέσεων (7) καλοῦνται *κλάδοι* τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z = \sqrt[n]{w}$.

III. Κλάδιά σημεία: Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς ὑάθε σημεῖον $w_0 = |w_0| \cdot e^{i\theta_0}$ τοῦ w -ἐπιπέδου ἐυλέχομεν μίαν τιμὴν τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $\sqrt[n]{w}$ ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὸν κλάδον $(\sqrt[n]{w})_k$ καὶ παριστῶμένην ἡ τιμὴ ὑπὸ τοῦ σημείου $z_0 = \sqrt[n]{|w_0|} \cdot e^{i\theta_0/n}$ ἀνήκοντος εἰς τὸ πεδίων G_k .

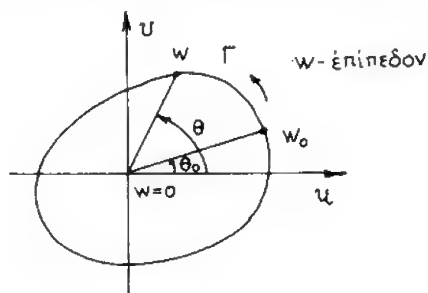
Ὡς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι, τὸ μεταβλητὸν σημεῖον $w = |w| \cdot e^{i\theta}$ τοῦ w -ἐπιπέδου διαγράφει μίαν κλειστὴν καμπύλην τοῦ Jordan Γ τοῦ w -ἐπιπέδου μὲ ἀρχικὸν καὶ τελικὸν σημεῖον τὸ w_0 . Τότε τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον τοῦ z -ἐπιπέδου εἶναι τὸ $z = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\theta/n}$ διαγράφον μίαν καμπύλην C εἰς τὸ z -ἐπίπεδον. Ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο δυνατότητες:



Σχ. 1

α). Τὸ σημεῖον $w = 0$ (δηλ. ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων) νὰ εἴται ἐκτὸς τῆς καμπύλης Γ . Τοτε καὶ δὲ διαγράφομεν τὴν καμπύλην Γ , τὸ ὅρισμα τοῦ σημείου w μεταβάλλεται. Ἐστω ὅτι ἔχει τοῦτο ἀρχικὴν τιμὴν θ_0 . Ὅταν τὸ w κινήθῃ ἐπὶ τῆς Γ καὶ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν καὶ τὸ ὅρισμα αὐτοῦ ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχικὴν του τιμὴν θ_0 (βλ. Σχ. 1). Ἐντεῦθεν αἱ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων: $(\sqrt[n]{w})_0, (\sqrt[n]{w})_1, (\sqrt[n]{w})_2, \dots, (\sqrt[n]{w})_{n-1}$ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀρχικὰς τῶν τιμὰς εἰς τὸ σημεῖον $w = w_0$ καὶ μετὰ τὴν διαδρομὴν τῆς καμπύλης Γ .

β). Εάν το σημείο $w=0$ υεΐται έντός της υαμπύλης Γ (βλ. Σχ. 2), τότε μία περιφορά υατά μήκος της Γ υαΐ υατά την φοράν πού εΐναι άντίθετος πρός την υΐνησιν των δειυτών του ώρολογΐου, τότε τό θ_0 αύξάνεται από θ_0 έως $\theta_0 + 2\pi$. Έπειδή $z = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\theta/n}$ τότε τό σημείο πού δ' άντιστοιχΐ μετά την (πρώτην) περιφοράν δέν θά εΐναι, όπως εΐς την πρώτην περίπτωση, τό z_0 , αλλά τό σημείο $z_1 = \sqrt[n]{|w_0|} \cdot e^{i(\theta_0+2\pi)/n}$, αλλά αυτό εΐναι τό σημείο πού άντιστοιχεΐ εΐς τον υλάδον $(\sqrt[n]{w})_{k+1}$, ύπό την έννοιαν ότι, υάθε τιμή της $\sqrt[n]{w}$ επί του υλάδου $(\sqrt[n]{w})_k$ αλλάσσει συνεχώς μετά της άντιστοιχου τιμής της $\sqrt[n]{w}$ επί του κλάδου $(\sqrt[n]{w})_{k+1}$.



Σχ. 2

Άναλόγως εάν η διαγραφή της Γ γΐνεται υατά την φοράν των δειυτών του ώρολογΐου, αύτη μεταβάλλεται από τον υλάδον $(\sqrt[n]{w})_k$ εΐς τον υλάδον $(\sqrt[n]{w})_{k-1}$. Επί πλέον ένας πεπερασμένος αριθμός περιφορών επί της Γ μεταβάλλει τον υλάδον $(\sqrt[n]{w})_k$ εΐς τον υλάδον $(\sqrt[n]{w})_l$. Τέλος η τό πλήθος περιφοραί υατά μήκος της Γ υαΐ υατά την αΐτήν φοράν μεταφέρουν τό σημείο z_0 εΐς τό ίδιον τό σημείο z_0 υαΐ υατά συνέπεια μεταφέρουν υάθε υλάδον $(\sqrt[n]{w})_k$ εΐς τον ίδιον.

Όρισμός IV-2-1. Ένα σημείο z_0 μιās πλησιζΐμου συναρτήσεως $f(z)$ θά υαληΐται υλαδιυόν, εάν τουτο έχη την ιδιότητα : Μία άπληΐ περιφορά υάθε υλειστΐς υαμπύλης του $Jordan$, ή όποΐα έχει τό z_0 εΐς τό έσωτεριυόν της (συντόμως "περιφορά πέριξ του z_0 "), μεταφέρει υάθε υλάδον της πλησιζΐμου συναρτήσεως εΐς έναν άλλον υλάδον αΐτης.

Έάν ένας πεπερασμένος αριθμός διαγραφών, έστω n , πέριξ του z_0 , υατά την αΐτήν φοράν, μεταφέρει έναν υλάδον της συναρτήσεως εΐς τον ίδιον, τότε τό υλαδικόν σημείο z_0 υαληΐται **πεπερασμένης τάξεως υλαδιυόν σημείο** υαΐ μάλιστα $n-1$ τάξεως.

Συμφώνως πρός τον άνωτέρω όρισμόν τό $w=0$ εΐναι υλαδιυόν σημείο της πλησιζΐμου συναρτήσεως $z = \sqrt[n]{w}$ υαΐ μάλιστα $n-1$ τάξεως.

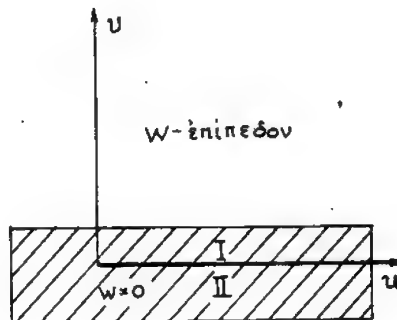
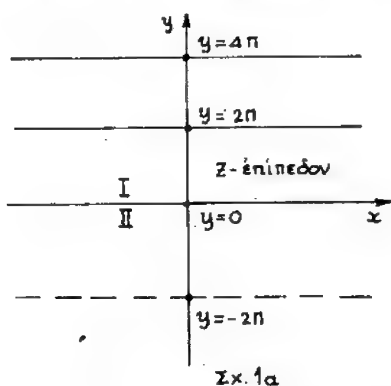
Έπειδή μία πλήρης περιστροφή υατά την άντίθετον φοράν πέριξ του σημείου $w=0$

είναι επίσης μία πλήρης περιστροφή περί το σημείου $w = \infty$ και το σημείο αυτό είναι ένα ιδιαιτερό σημείο της ανωτέρω συναρτήσεως.

Άλλα ιδιαιτερά σημεία της $z = \sqrt[n]{w}$ δεν υπάρχουν (διότι;).

§ 3. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $w = e^z$ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΤΗΣ $z = \log w$.

Ι. Θεωρούμεν την συνάρτησιν $w = e^z$ (1). Έστω $z = x + iy$, ὅτε $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Έξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ἡ ανωτέρω συνάρτησις εἰς κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν $z = x + iy$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μιγαδικὸν ἀριθμὸν τοῦ ὁποῖου τὸ μέτρον εἶναι ὁ ἀριθμὸς e^x καὶ τὸ ὄρισμα εἶναι y . (διότι τὸ ὄρισμα τοῦ e^{iy} εἶναι y) Έξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ἡ (εὐθεῖα) γραμμὴ $y = y_0$ τοῦ z -ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται εἰς μίαν γραμμὴν τοῦ w -ἐπιπέδου ἡ ὁποία ἔχει σταθερὸν ὄρισμα ἴσον πρὸς y_0 καὶ τοιαύτη γραμμὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς (αὐτῆς) τοιαύτη, ὥστε $\arg w = y_0$.



Ὅπως εἶναι εὐνόητον νὰ ἴδωμεν ἡλικίαν (I) τοῦ z -ἐπιπέδου φρασσομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $y = 0$ καὶ $y = 2\pi$ δὲ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἐπευτεταμένον w -ἐπίπεδον καὶ τὰ σύνορα τοῦ ανωτέρω χωρίου (ἡλικίδος) δηλ. αἱ εὐθεῖαι $y = 0$ καὶ $y = 2\pi$ ἀπεικονίζονται εἰς τὸν δεξιὸν ἡμιᾶξονα $u \geq 0$ τοῦ w -ἐπιπέδου. Οὕτω μεταξὺ τοῦ πεδίου $0 \leq y < 2\pi$ καὶ τοῦ w -ἐπιπέδου ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία καὶ συνέπειαν ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως $w = e^z$ ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλητὴ εἰς τὸ w -ἐπίπεδον καὶ τὴν ὁποίαν δὲ παριστῶμεν οὕτω:

$$z = \log w \quad (2)$$

Ἡ συνάρτησις (2) ἔχει πεδίου ὁρισμοῦ τὸ ἐπευτεταμένον w -ἐπίπεδον ἔξαφρῆσει τῶν σημείων $w + |w| = 0$ καὶ πεδίου τιμῶν τὸ πεδίου τοῦ z -ἐπιπέδου, τὸ ὁρισόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως $0 \leq y < 2\pi$.

Αὕτη δὲ καλεῖται λογάριθμος τοῦ w , διὰ τ'ἀνωτέρω πεδία ὀρίσμου καὶ τιμῶν.

Ἐὰν καλέσωμεν $\theta = \arg w$ ὅπου $0 \leq \theta < 2\pi$, τότε διὰ $w \neq 0$ ἡ (1) γράφεται

$$e^z \{ \cos y + i \sin y \} = |w| \cdot \{ \cos \theta + i \sin \theta \} \quad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$e^x = |w| \text{ καὶ } y = \theta \quad \text{ἢ} \quad x = \log |w| \text{ καὶ } y = \theta.$$

Ὅθεν, $z = x + iy = \log |w| + i\theta$

Ὡστε $z = \log w = \log |w| + i\theta \quad (4) \quad 0 \leq \theta < 2\pi$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, $\operatorname{Im} z = \theta = \arg w$.

Ἡ ἀντίστροφος λοιπὸν τῆς (1) δίδεται ὑπὸ τῆς (4) ὅπου, ὡς πεδίων τιμῶν τοῦ z εἶναι ἡ ἡωρίς $0 \leq y < 2\pi$, ἐπὶ πλεόν δὲ αὕτη εἶναι μία ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ συνάρτησις: Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα IX - 1 - 2 ἡ παράγωγος ταύτης εἶναι:

$$\frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{\frac{de^z}{dz}} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Ἐὰν ἐνθέσωμεν τὸν περιορισμὸν $0 \leq y < 2\pi$, ἐκ τῆς σχέσεως (3) λαμβάνομεν:

$$e^x = |w| \text{ καὶ } y = \theta + 2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Οὕτω: $z = x + iy = \log |w| + i \cdot \{ \theta + 2k\pi \} \quad \text{ἢ}$

$$z = \log |w| + i \cdot \arg w \quad (5), \text{ ὅπου } \arg w = \theta + 2k\pi.$$

Ἡ συνάρτησις ἡ ὀριζομένη ὑπὸ τοῦ (5) καλεῖται λογάριθμος τῆς w καὶ συμβολίζεται μὲ $\log w$.

Ὡστε: $\log w = \log |w| + i \cdot \arg w \quad (6)$

Ὁ λογάριθμος λοιπὸν εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις - εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν μὲ ἀπείρους (ἀριθμησίμους) τιμάς.

Εἰς τὴν (6) τὸ $\arg w = \theta + 2k\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ὅπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Ὅθεν ἔχομεν:

$$\log w = \log |w| + i\theta + i2k\pi \quad (7)$$

Τὴν τιμὴν ὅπου λαμβάνομεν διὰ $k=0$ καλοῦμεν πρωτεύουσα τιμὴν ἢ πρωτεύοντα τιμὴν τῆς $z = \log w$, ἥτοι ἡ πρωτεύουσα τιμὴ εἶναι ἡ δίδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου (4).

Βάσει του τύπου (6) δυνάμεθα νά υπολογίσωμεν τούς λογαρίθμους πάντων τῶν ἀριθμῶν πραγματικῶν καί μιγαδικῶν. Οὕτως:

$$\log(-1) = \log 1 + i \arg(-1) + i \cdot 2k\pi = (1+2k)\pi \cdot i, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\log(i) = \log|i| + i \cdot \arg i + i \cdot 2k\pi = \log 1 + i \cdot \frac{\pi}{2} + i \cdot 2k\pi = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi \cdot i, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

II. Κλάδοι τῆς συναρτήσεως $\log w$: Ὡς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $w = e^z$. Παρατηροῦμεν ὅτι: $e^{z+i \cdot 2k\pi} = e^z \cdot e^{i \cdot 2k\pi} = e^z \cdot 1 = e^z = w$.

Ὡς παραστήσωμεν μὲ $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \dots$ ἀντιστοίχως τὰ πεδία (λωρίδας) G_k (βλ. Σχ. 3) ὅπου ταῦτα ὀρίζονται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος:

$$G_k: 2k\pi < \Im m z < 2(k+1)\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ἡ εἰκὼν ὑπὸ τῆς $w = e^z$ ἐκάστου τῶν ἀνωτέρω πεδίων G_k εἶναι τὸ αὐτὸ πεδίου καὶ μάλιστα τὸ ἐπυτευταμένον w -ἐπίπεδον.

Ἡ συνάρτησις $w = e^z$ μὲ πεδίου ὀρισμοῦ τὸ G_k καὶ πεδίου τιμῶν τὸ w -ἐπίπεδον

ἔχει μίαν μονότιμον ἀντίστροφον ἢ ὅποια ἔχει πεδίου ὀρισμοῦ τὸ w -ἐπίπεδον καὶ πεδίου τιμῶν τὸ G_k . Αὕτη ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ εἰς τὸ w -ἐπίπεδον καὶ θὰ συμβολίζεται οὕτως: $z = (\log w)_k$ ὅπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Εὐνόμως διαπιστοῦται, ὡς ἐμφαίνηται καὶ ἐκ τοῦ Σχ. 3, ὅτι: $z = (\log w)_k = (\log w)_0 + i \cdot 2k\pi$.

Εἶναι ὁμῶς: $(\log w)_0 = \log|w| + i \cdot \theta$, ὅπου $0 \leq \theta < 2\pi$.

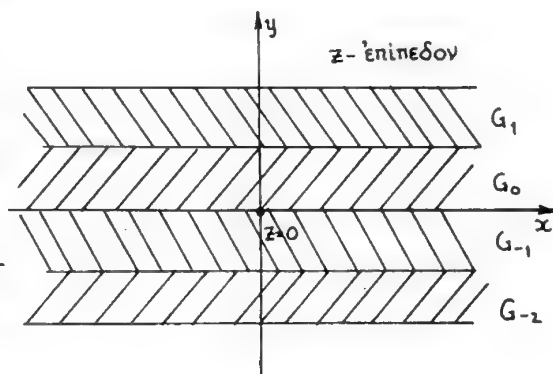
Συνεπῶς: $z = (\log w)_k = \log|w| + i(\theta + 2k\pi)$.

Οὕτως δὲ ἐκάστην τιμὴν τοῦ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ἔχομεν καὶ μίαν μονότιμον συνάρτησιν μὲ πεδίου ὀρισμοῦ τὸ w -ἐπίπεδον καὶ πεδίων τιμῶν τὸ G_k . Αἱ συναρτήσεις αὗται δηλ. αἱ

$$(\log w)_0, (\log w)_1, (\log w)_{-1}, (\log w)_2, (\log w)_{-2}, \dots$$

καλοῦνται κλάδοι τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $z = \log w$ καὶ ἐκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι μία ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ συνάρτησις καὶ ὡς ἐκ τούτου ἰσχύει τὸ θεώρημα IV-1-2.

III. Κλάδιὰ σημεία τῆς $z = \log w$. Ἐστω τὸ σημεῖον $w_0 = |w_0|e^{i\theta_0}$ τοῦ w -ἐπιπέδου. Ἐκλέγμεν μίαν τιμὴν τοῦ $\log w$ ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὸν κλάδον $(\log w)_k$ καὶ παρισταμένην



Σχ. 3

ὑπό τοῦ σημείου $z_0 = \log |w_0| + i \theta_0$ ἀνήκουσα εἰς τὸ πεδίον (λωρίδα) G_k

Ἄς ὑποθέσωμεν ἥδη ὅτι τὸ σημεῖον $w = |w| \cdot e^{i\theta}$ διαγράφει μίαν κλειστὴν καμπύλην τοῦ Jordan Γ εἰς τὸ w -ἐπίπεδον μέ ἀρχικὸν καὶ τελικὸν σημεῖον τὸ w_0 . Τότε τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον, ἥτοι τὸ $z = \log |w| + i \theta$ διαγράφει ἐπὶ τοῦ z -ἐπιπέδου μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμὴ C . Ἐάν τὸ σημεῖον $w = 0$ μεῖται ἐντὸς τῆς καμπύλης Γ , τότε μία περιφορὰ περὶ Γ κατὰ φοράν ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου ὁ κλάδος $(\log w)_k$ μεταφέρεται εἰς τὸν κλάδον $(\log w)_{k+1}$, διότι, $\log w = \log |w| + i(\theta + 2k\pi)$.

Ἐάν ἡ περιφορὰ περὶ Γ γίνη κατὰ τὴν φοράν τῶν δεικτῶν τοῦ ὥρολογίου, τότε ὁ κλάδος $(\log w)_k$ μεταφέρεται εἰς τὸν κλάδον $(\log w)_{k-1}$. Ὅθεν, τὸ σημεῖον $w=0$ εἶναι ἓνα κλαδικὸν σημεῖον. Ὁμοίως τὸ $w=\infty$ εἶναι ἓνα ἄλλο κλαδικὸν σημεῖον. Ἡ ἐξήγησις εἶναι ἀνάλογη πρὸς αὐτὴν ποὺ ἐδώσαμεν διὰ τὸ ἴδιον σημεῖον εἰς τὴν συνάρτησιν $\sqrt[n]{w}$.

$$\begin{aligned} \text{Ἐπειδὴ} \quad & (\log w)_k \longrightarrow (\log w)_{k+1} \longrightarrow (\log w)_{k+2} \longrightarrow \dots \\ & (\log w)_k \longrightarrow (\log w)_{k-1} \longrightarrow (\log w)_{k-2} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

τὰ σημεῖα 0 καὶ ∞ δὲν εἶναι πεπερασμένης τάξεως, δι' αὐτὸν τὸν λόγον τὰ κλαδικὰ αὐτὰ σημεῖα καλοῦνται λογαριθμικὰ ἢ καὶ ὑπερβατικὰ ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ κλαδικὰ τῆς $\sqrt[n]{w}$, τὰ ὁποῖα καλοῦνται ἀλγεβρικὰ.

§4. Αἱ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ a^z ΚΑΙ z^a .

I. Ἡ συνάρτησις a^z Ἐάν ὁ a εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ z φυσικὸς ἀριθμὸς, εἶναι γνωστὸν ὅτι: $\log a^z = z \cdot \log a$. Ὅθεν εἶναι φυσικὸν νὰ ὀρίσωμεν τὴν συνάρτησιν:

$$\boxed{a^z = e^{z \log a}} \quad (1) \quad \text{ὅπου } a \neq 0$$

Ὁ a εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ z μιγαδικὴ μεταβλητὴ.

Ἡ συνάρτησις $f(z) = a^z$ εἶναι πλειότιμος καθ' ὅτι ἡ $\log a$ εἶναι πλειότιμος συνάρτησις. Εἰς τὴν πεδίον ὅπου αὐτὴ εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ἀπλὴ ἔχομεν:

$$(a^z)' = (e^{z \log a})' = e^{z \log a} \cdot \log a = a^z \log a.$$

II. Ἡ συνάρτησις z^a Δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς ρόλους τῶν a καὶ z καὶ

οὕτω νά ὀρίσωμεν τήν συνάρτησιν z^a ὡς ἀπολούθως:

$$z^a = e^{a \cdot \log z} \quad (2) \quad \text{ὅπου } z + |z| \neq 0.$$

Ἡ (2) εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις καί ἐάν θεωρήσωμεν ἕναν κλάδον τῆς πλειοτιμίου συναρτήσεως $\log z$, ἡ z^a εἶναι ἀναλυτικὴ καί ἀπλήτῃ εἰς αὐτόν, καί ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νά ἔχωμεν:

$$(z^a)' = (e^{a \cdot \log z})' = e^{a \cdot \log z} \cdot (a \cdot \log z)' = z^a \cdot a \cdot \frac{1}{z} = a \cdot z^{a-1}.$$

Ἐφαρμογή: Νά υπολογισθῇ τὸ i^i .

Λύσις: Εἶναι $i^i = e^{i \log i} = e^{i \{ \log |i| + i \frac{\pi}{2} + i 2k\pi \}} = e^{i \{ 0 + i \frac{\pi}{2} + i 2k\pi \}} = e^{-\{1+4k\} \frac{\pi}{2}}.$

Διὰ $k=0$ ἔχομεν: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$

§5. ΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ι. Ἡ συνάρτησις τοξημω. Ὡς καθέσωμεν G_k , $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ τήν λωρίδα τοῦ z -ἐπιπέδου ἡ ὁποία ὀρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος:

$$G_k: (k - \frac{1}{2})\pi < \operatorname{Re} z < (k + \frac{1}{2})\pi$$

Ἡ συνάρτησις $w = \eta \mu z$ (1) ἀπεικονίζει πάσας τὰς λωρίδας $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \dots$ εἰς τὸ αὐτὸ πεδίον E πού εἶναι τὸ w -ἐπίπεδον ἐφ' ὅσον ἐξ αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ διαστήματα $(-\infty, -1)$ καί $(1, +\infty)$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος. Διότι διὰ w πραγματιούν, διὰ νά ἔχῃ ἔννοια ἡ εἰσώσις $w = \eta \mu z$ δά πρέπει νά εἶναι $|w| \leq 1$. Οὕτω ἡ συνάρτησις $w = \eta \mu z$ μέ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ G_k καί πεδίου τιμῶν τὸ E ἔχει μίαν μόνον ἀντίστροφον μέ πεδίου ὁρισμοῦ τὸ E καί πεδίου τιμῶν τὸ G_k . Ἡ ἀντίστροφος αὕτη συμβολίζεται οὕτω:

$$z = (\text{τοξημω})_k \quad (2) \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ἡ συνάρτησις ἡ ὀρισμένη ὑπὸ τῆς (2) εἶναι ἀναλυτικὴ καί ἀπλήτῃ καί τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος εἶναι:

$$\frac{d(\text{τοξημω})_k}{dw} = \frac{1}{\frac{d\eta \mu z}{dz}} = \frac{1}{\sigma \omega z} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta \mu^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ὡς θεωρήσωμεν τήν (1) καί ἄς ἀντιταστήσωμεν: $\eta \mu z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, τότε ἡ (1) γίνεταί:

$$e^{2iz} - 2i w \cdot e^{iz} - 1 = 0 \quad (3)$$

Ἡ (3), θεωρουμένη ὡς μία δευτεροβάθμιος εἰσώσις μέ ἄγνωστον τὸν e^{iz} , ἐπι-

δέχεται δύο λύσεις. Η μία λύσις τῆς (3) εἶναι ἡ υἰάτωδι:

$$e^{iz} = iw + \sqrt{1-w^2} \quad (4)$$

Ἡ ἄλλη λύσις $e^{iz} = iw - \sqrt{1-w^2}$ παραλείπεται, ἐπειδὴ τὸ $\pm \sqrt{1-w^2}$ συνεπάγεται ἐν τοῦ $\sqrt{1-w^2}$.

Συνεπῶς ἡ λύσις τῆς (1) εἶναι ἡ δίδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$z = -\frac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1-w^2}) \quad (5)$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη καλεῖται ἀντιστροφος συνάρτησις τοῦ ἡμιτόνου καὶ συμβολίζεται μὲ τοξημω. Ὅθεν:

$$z = \text{τοξημω} = \frac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1-w^2}) \quad (5')$$

Αὕτη εἶναι μία πλειότιμος συνάρτησις μὲ πεδίων ὀρίσμου τὸ ἀνωτέρω ὀρίσθὲν πεδίων E τοῦ w -ἐπιπέδου καὶ πεδία τιμῶν τὰς λωρίδας G_k .

Παραλείποντες τὴν σταθεράν $2\kappa\pi i$ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογαριθμὸν, ὁ τύπος (5') μᾶς δίδει τότε τὸν πρωτεύοντα κλάδον τῆς ἀντιστροφῆς συνάρτησεως τοῦ ἡμιτόνου.

Ἡ συνάρτησις τοξημω ἔχει τρία κλάδιὰ σημεῖα τὸ λογαριθμιῶν, $w = \infty$ καὶ τὰ $z = 1$ καὶ $z = -1$ κλάδιὰ πρώτης τάξεως (ἀλγεβριῶν) (διατί;).

II. Ἡ συνάρτησις τοξουνω. Κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν προηγούμενον ὀρίσθμεν τὴν ἀντιστροφὸν τῆς συναρτήσεως $w = \sin z$. Αὕτη εἶναι ἡ πλειότιμος συνάρτησις ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\text{τοξουνω} = \frac{1}{i} \log(w + i\sqrt{1-w^2}) \quad (6)$$

Παραλείποντες τὴν σταθεράν $2\kappa\pi i$ εἰς τὸν λογαριθμὸν τοῦ τύπου (6) ἔχομεν τὸν πρωτεύοντα κλάδον τῆς ἀντιστροφῆς συνάρτησεως τοῦ συνημιτόνου.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον, ἐφ' ὅσον ἐν τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ τμήματα ἀπὸ $-\infty$ ἕως -1 καὶ ἀπὸ $+1$ ἕως $+\infty$.

III. Ἡ συνάρτησις τοξεφω. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ λεχθέντα διὰ τὴν συνάρτησιν τοξημω δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὴν πλειότιμον συνάρτησιν τοξεφω. Ἀς καλέσωμεν G_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ τὴν λωρίδα τοῦ ἐπιπέδου ἡ ὁποία ὀρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνισότητος:

$$G_k: (k - \frac{1}{2})\pi < \text{Re } z < (k + \frac{1}{2})\pi$$

Ἡ συνάρτησις $w = \text{εφ } z$ (1) ἀπεικονίζει πᾶσας τὰς λωρίδας $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_{-2}, \dots$ εἰς τὸ αὐτὸ πεδίων E πού εἶναι τὸ w -ἐπίπεδον ἐφ' ὅσον ἐξ αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ διαστή-

ματα του μιγαδικου άξονος από $-\infty i$ έως $-i$ και από i έως ∞i .

Ούτω η συνάρτησις $w = \epsilon\varphi z$ με πεδίων όρισμού τό G_k και πεδίων τιμών τό E έχει μίαν μόνον αντίστροφον με πεδίων όρισμού τό E και πεδίων τιμών τό G_k . Η αντίστροφος αυτή συμβολίζεται ούτω:

$$z = (\text{το}\epsilon\epsilon\varphi w)_k \quad (2), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Η συνάρτησις η όρισμένη υπό της (2) είναι αναλυτική και άπλη και της όποιας η παράγωγος είναι:

$$\frac{d(\text{το}\epsilon\epsilon\varphi w)_k}{dw} = \frac{1}{\frac{d\epsilon\varphi z}{dz}} = \frac{1}{\sin^2 z} \quad \eta \quad \frac{d(\text{το}\epsilon\epsilon\varphi w)_k}{dw} = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 z} = \frac{1}{1 + w^2} \quad (3)$$

Η λύσις της εξίσωσεως $\epsilon\varphi z = w$, όταν τό w είναι δοθείς αριθμός, εύρίσκεται από την σχέσηιν:

$$w = \frac{\eta\mu z}{\sigma\omega z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad \eta \quad e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw} \quad (4)$$

Έντεϋθεν, λόγω της υποθέσεως $w \neq \pm i$ η λύσις της (4) είναι η κάτωθι:

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw} \quad (5)$$

Η συνάρτησις η δίδομένη υπό της (5) καλεΐται αντίστροφος συνάρτησις της εξαφαντομένης και συμβολίζεται με $\text{το}\epsilon\epsilon\varphi w$. Οθεν:

$$z = \text{το}\epsilon\epsilon\varphi w = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw} \quad (5')$$

Παραλείποντες την σταθεράν $2\kappa\pi i$ που αντιστοιχεί εις τόν λογάριθμον ό τύπος (5') μας δίδει τόν πρωτεύοντα κλάδον της αντίστροφου συναρτήσεως της εξαφαντομένης. Αυτή είναι αναλυτική εις όλούκληρον τό επίπεδον, εφ' όσον έχομεν απούψει από τόν φανταστιuόν άξονα τά τμήματα από $-\infty i$ έως $-i$ και από i έως ∞i .

§ 6. ΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

κατ' έναν ανάλογον τρόπον πρός τας αντίστροφους τών τριγωνομετρουών συναρτήσεων δυνάμεθα νά εισαγάγωμεν τας αντίστροφους τών υπερβολικουών συναρτήσεων.

κατ' αρχάς άς θεωρήσωμεν την εξίσωσιν:

$$w = \sinh z \quad (1)$$

ή όποία είναι ίσοδύναμος προς την εξίσωσιν

$$e^{2z} - 2we^z - 1 = 0$$

υαί ή όποία έχει μίαν μεριυήν λύσιν την

$$z = \log(w + \sqrt{w^2 + 1}) \quad (2)$$

Ούτω δημιουργείται μία νέα συνάρτησις υαί την όποιαν θα συμβολίσωμεν ούτω: $\alpha\tau\sinh w$ υαλουμένη (πρωτεύουσα) *αντίστροφος συνάρτησις του υπερβολιουού ήμιτόνου* υαί ή όποία είναι αναλυτική εις τό αυτό χωρίον του w -επιπέδου όπως υαί ή $\alpha\tau\cosh w$. Ο (2) λοιπόν γράφεται:

$$\alpha\tau\sinh w = \log(w + \sqrt{w^2 + 1}) \quad (2')$$

κατ' ανάλογον τρόπον όρίσoμεν:

$$\alpha\tau\cosh w = \log(w + \sqrt{w^2 - 1}) \quad (3)$$

υαλουμένη (πρωτεύουσα) *αντίστροφος συνάρτησις του υπερβολιουού συνημιτόνου*
Τέλος ευ της εξισώσεως:

$$w = \tanh z \quad (4)$$

λαμβάνομεν την λύσιν:

$$e^{2z} = \frac{1+w}{1-w} \quad (5)$$

Μία μεριυή λύσις της (5) είναι ή υάτωδι:

$$z = \frac{1}{2} \log \frac{1+w}{1-w} \quad (5')$$

Ούτω δημιουργείται μία νέα συνάρτησις υαί την όποιαν θα συμβολίσωμεν ούτω: $\alpha\tau\tanh w$ υαλουμένη (πρωτεύουσα) *αντίστροφος συνάρτησις της υπερβολιουής εφαπτομένης*. Ο (5') γράφεται:

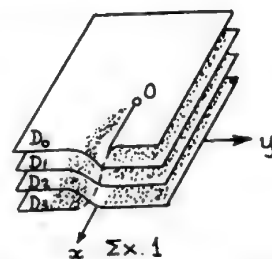
$$\alpha\tau\tanh w = \frac{1}{2} \log \frac{1+w}{1-w} \quad (6)$$

Η άνωτέρω συνάρτησις είναι αναλυτική εις τό αυτό χωρίον του μιγαδιουού επιπέδου εις τό όποϊον είναι υαί ή συνάρτησις $\alpha\tau\cosh w$.

Παρατήρησις: Ειδίυως εις αυτήν την § περιορίσθημεν νά όρίσoμεν τούς πρωτεύοντας υαλάδους των αντίστροφων των συναρτήσεων $w = \sinh z$, $w = \cosh z$, $w = \tanh z$ υαί ούτω επιτύχαμεν μονοτίμους συναρτήσεις. Γενιυως δέ αι αντίστροφοι των άνωτέρω συναρτήσεων είναι υαί έδω προφανως πλειότιμοι συναρτήσεις

§ 7. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ RIEMANN

Μία επιφάνεια του Riemann είναι μία γενίκευσις του μιγαδικού επιπέδου εις μιαν επιφάνειαν αποτελούμενη από περισσότερα από ένα "φύλλα". Τοιαύτη ώστε μία πλειότιμος συνάρτησις νά ἔχη μιαν μόνον τιμήν ἀντιστοιχοῦσα εις ἕνασπον σημεῖον τῆς επιφάνειας. Μία τοιαύτη επιφάνεια θεωρεῖται διαιρεμένη εις φύλλα διὰ μιαν δοθεῖσαν πλειότιμον συνάρτησιν, ἡ δὲ συνάρτησις εἶναι μονότιμος πλέον ἐπὶ τῆς επιφάνειας καὶ οὕτω δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τὴν θεωρίαν τῶν μονοτίμων συναρτήσεων. Ὡς παράδειγμα ἄς λάβωμεν τὴν πλειότιμον συνάρτησιν $w = \sqrt[n]{z}$ ποῦ ἐξετάσωμεν εις τὴν § 2. Πρὸς τοῦτοις λαμβάνομεν ὡς φύλλον D_k τῆς επιφάνειας τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον θεωρεῖται τεμνόμενον κατὰ μήκος τοῦ δετιμοῦ ἡμιάξονος. Οὕτω τὸ D_k ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $2k\pi < \arg z < 2(k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (βλ. Σχ. 1). Λαμβάνομεν δὲ ὡς ἀρχικὸν πεδῖον D_0 τὸ πεδῖον τοῦ κλάδου $f_0(z)$ τῆς συναρτήσεως ὁριζόμενον (τὸ πεδῖον) ὑπὸ τῆς συνθήκης $0 < \arg z < 2\pi$ καὶ ἀνολοῦθως θεωροῦμεν τοὺς κλάδους $f_1(z), \dots, f_{n-1}(z)$ τῆς συναρτήσεως ποῦ λαμβάνουν τὰς τιμὰς τῶν εις τὰ πεδία D_1, \dots, D_{n-1} . Ἀνολοῦθως θεωροῦμεν ἡ ἀνάπτυκα φύλλων ἔχοντα τὸ αὐτὸ σχῆμα μέ τὸ D_k καὶ "συγυολλῶμεν" τὸ κατὰ ἄνω ἄκρον τῆς "σχισμῆς" τοῦ πεδίου D_0 (βλ. § 2) - ἡ σχισμὴ τοῦ επιπέδου θεωρεῖται κατὰ μήκος τοῦ δετιμοῦ ἄξονος τῶν x - μέ τὸ ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ πεδίου D_1 , ἀνολοῦθως τὸ κατὰ ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ πεδίου D_1 μέ τὸ ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ πεδίου D_2 κ. ὅ. κ. Αἱ τιμαὶ τῶν $f_0(z)$ καὶ $f_n(z)$ ἐπὶ τοῦ δετιμοῦ ἡμιάξονος (καὶ ἐντὸς τῶν πεδίων $D_n = D_0$) συμπίπτουν. Κατὰ συνέπειαν ἔχομεν νά συγυολλήσωμεν τὸ ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ φύλλου D_0 μέ τὸ κατὰ ἄνω ἄκρον τῆς σχισμῆς τοῦ D_{n-1} .



Αἱ τιμαὶ τῆς $\sqrt[n]{z}$ εις τὰ ἄλλα πεδία D_k δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἢ μὴ ἐπανάληψις τῶν τιμῶν τῶν κλάδων f_0, f_1, \dots, f_{n-1} . Ὅθεν, ἡ επιφάνεια τοῦ Riemann εις τὴν προυειμένην περίπτωσιν ἀποτελεῖται ἀπὸ n -φύλλα (βλ. Σχ. 1). Αὕτη ἔχει ὡς ἐλέγχον καὶ εις τὴν § 2 τὰ

Αἱ τιμαὶ τῆς $\sqrt[n]{z}$ εις τὰ ἄλλα πεδία D_k δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἢ μὴ ἐπανάληψις τῶν τιμῶν τῶν κλάδων f_0, f_1, \dots, f_{n-1} .

Ὅθεν, ἡ επιφάνεια τοῦ Riemann εις τὴν προυειμένην περίπτωσιν ἀποτελεῖται ἀπὸ n -φύλλα (βλ. Σχ. 1). Αὕτη ἔχει ὡς ἐλέγχον καὶ εις τὴν § 2 τὰ

$z=0$ και $z=\infty$ ομαδιὰ σημεία.

§8. ΙΔΙΑΙΟΤΗΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

I. Όμαλά σημεία. Έστω η συνάρτησις $f(z)$ η οποία είναι αναλυτική εις τό σημείον $z_0 \neq \infty$ (δηλ. εις μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου z_0). Τότε τό σημείον αὐτό θά καλεῖται όμαλόν σημείον τῆς $f(z)$.

Μία συνάρτησις θά καλεῖται όμαλή ἐντός ενός συνόλου, ἐάν πάντα τά σημεία τοῦ συνόλου ὁρίσμου της εἶναι όμαλά.

Μία συνάρτησις $f(z)$ θά καλεῖται όμαλή εις τό σημείον $z=\infty$, ἐάν ἡ συνάρτησις $\varphi(z) = f(1/z)$ εἶναι όμαλή εις τό σημείον $z=0$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

Ἐντός ενός ἀρρουντως μικροῦ κύκλου περὶ ενός όμαλοῦ σημείου z_0 τῆς $f(z)$ αὐτὴ ἔχει τὴν κατὰ Taylor ἔκφρασιν, ἥτοι :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (1)$$

Ἐάν τό $z=\infty$ εἶναι όμαλόν σημείον τῆς $f(z)$, τότε ἡ $\varphi(z) = f(1/z)$ δύναται ν' ἀναπτυχθῇ περὶ τοῦ μηδενός εις μίαν δυναμοσειράν καὶ κατ' ἀμολογίαν ἡ $f(z)$ ἔχει τὴν ἔκφρασιν :

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^{-n} \quad (2)$$

Ἡ (2) συγυλίνει δὲ ἀρρουντως μεγάλας τιμάς τοῦ $|z|$, δηλ. εις μίαν περιοχὴν τοῦ $z=\infty$

II. Μηδενίσοντα σημεία. Ἐνα σημείον z_0 θά καλεῖται μηδενίσον τὴν $f(z)$, ἐάν $f(z_0)=0$.

Ἐάν $f(z) = (z-z_0)^n \cdot \varphi(z)$, ὅπου $\varphi(z_0) \neq 0$ καὶ ὁ n εἶναι ἓνας φυσικός ἀριθμός, τότε τό σημείον z_0 καλεῖται μηδενίσον πολλαπλότητας n τῆς $f(z)$. Ἐάν $n=1$ τό z_0 θά καλεῖται μηδενίσον πολλαπλότητας ἓνα.¹⁾

Θά λέγωμεν ὅτι, τό $z=\infty$ εἶναι μηδενίσον τῆς $f(z)$, ἐάν τό $z=0$ εἶναι μηδενίσον τῆς $\varphi(z) = f(1/z)$. Ἐάν n εἶναι ἡ τάξις τοῦ μηδενίσοντος σημείου, τότε θά ἔχωμεν :

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi(z) = z^n \cdot P(z) \quad (1), \quad P(0) \neq 0$$

ὅπου ἡ $P(z)$ εἶναι όμαλή εις τό $z=0$.

¹⁾ Ἐνα μηδενίσον σημείον δέν εἶναι τίποτ' ἄλλο παρὰ ἡ ρίζα τῆς $f(z)=0$.

Όθεν, $f(z) = z^{-n} \cdot q(z)$, $q(\infty) \neq 0$,
 όπου η $q(z)$ είναι αναλυτική εις τό $z = \infty$.

π.χ. τῆς συναρτήσεως $f(z) = \eta \mu z$ τὰ μηδενίζοντα σημεία είναι οἱ ἀριθμοί $k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

III. Πόλοι. Ἐάν ὑπάρχη ἓνας θετικὸς ἀνέραιος n τοιοῦτος, ὥστε: $f(z) = (z - z_0)^{-n} \cdot \varphi(z)$,
 μέ $\varphi(z_0) \neq 0$, τότε τό $z = z_0$ καλεῖται **πόλος n -τάξεως**. Διὰ $n=1$ τό σημεῖον $z = z_0$
 καλεῖται **ἀπλὸς πόλος**. Γενικῶς ἓνας πόλος εἶναι ἓνα ἀνώμαλον σημεῖον (βλ. IV).

Π.χ. Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{(z-2)^4}$ ἔχει τό $z=2$ πόλον τάξεως $n=4$.

Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{e^z}{(z-3i)^2 \cdot (z-5)}$ ἔχει ὡς πόλους τὰ σημεία $z=3i$ τάξεως $n=2$
 καὶ τό $z=5$ ἀπλὸν πόλον.

Προφανῶς ἓνα μηδενίζον σημεῖον πολλαπλότητος n τῆς $f(z)$ θὰ εἶναι πόλος τά-
 ξεως n τῆς $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Πρότασις IV-8-1. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τό $z = z_0$ εἶναι πόλος τῆς
 ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἶναι $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $f(z) = (z - z_0)^{-n} \cdot \varphi(z)$, ὅπου $\varphi(z_0) \neq 0$ ἔπεται ὅτι $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

Ἰκανόν: Ἐστω ὅτι $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, λέγομεν ὅτι τό z_0 εἶναι πόλος τῆς $f(z)$.

Πράγματι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓναν ἀριθμὸν $\tau > 0$ τοιοῦτον, ὥστε $|f(z)| > 1$, ὅταν
 $0 < |z - z_0| < \tau$. Ἡ συνάρτησις $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς πάντα τὰ σημεία $z \neq z_0$
 τὰ εὕρισυόμενα ἐντὸς τοῦ δακτυλίου $0 < |z - z_0| < \tau$ καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι τοπικῶς
 φραγμένη εἰς τό $z = z_0$, διότι ἔχομεν: $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ καὶ διὰ τὰθε
 z μέ $0 < |z - z_0| < \tau$ ἔχομεν $|h(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1$.

Όθεν, ἡ $h(z)$ εἶναι ὁμαλὴ εἰς τό $z = z_0$ καὶ ἐπιδέχεται τό $z = z_0$ ὡς μηδενίζον ση-
 μεῖον. θὰ εἶναι λοιπὸν:

$h(z) = (z - z_0)^n \cdot k(z)$, ὅπου $k(z_0) \neq 0$ καὶ ἡ $k(z)$ εἶναι ὁμαλὴ εἰς τό σημεῖον z_0 .

θὰ ἔχωμεν: $f(z) = \frac{1}{h(z)} = (z - z_0)^{-n} \cdot \varphi(z)$, ὅπου εἶναι $\varphi(z_0) = \frac{1}{k(z_0)} \neq 0$ καὶ ἡ $\varphi(z)$
 εἶναι ὁμαλὴ εἰς τό σημεῖον $z = z_0$. Ὅθεν, τό $z = z_0$ εἶναι πόλος τῆς $f(z)$ n -τάξεως.

Π.χ. οἱ πόλοι τῆς συναρτήσεως $f(z) = \frac{1}{\eta \mu z}$ εἶναι τὰ σημεία $z = k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ διότι,

Έχομεν $\lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{|\eta\mu z|} = \infty$. Ομοίως της συναρτήσεως $f(z) = \epsilon\phi z = \frac{\eta\mu z}{\sigma\upsilon\nu z}$ τὰ σημεῖα $z = k\pi$ εἶναι ἐπίσης ἀπλοί πόλοι.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, μία συνάρτησις $f(z)$ ἀναλυτικὴ εἰς ἓνα χωρίον G , δύναται νὰ ἔχη τὸ πολὺ ἓνα ἀριθμήσιμον πλήθος πόλων εἰς αὐτὸ τὸ χωρίον.

IV Οὐσιώδη ἀνώμαλα σημεῖα: Ἐνα σημεῖον z_0 τῆς $f(z)$ τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ὁμαλὸν ἢ πόλος καλεῖται οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$.

Ἐὰν μία μονότιμος συνάρτησις ἔχη ἓνα ἀνώμαλον σημεῖον τότε τοῦτο δὲ εἶναι εἴτε ἓνας πόλος εἴτε ἓνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον ἓνας πόλος λέγομεν ὅτι εἶναι μὴ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Ὅθεν, τὸ σημεῖον $z = z_0$ δὲ εἶναι ἓνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον, ἂν δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓναν δετιμὸν ἀιέραιον η τοῦ-
τον, ὥστε $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n \cdot f(z) = A \neq 0$.

Π.χ. Αἱ συναρτήσεις $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $f(z) = \eta\mu \frac{1}{z}$ ἔχουν τὸ σημεῖον $z = 0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον (διατί;).

Αἱ ἐξισώσεις $e^{\frac{1}{z}} = 1$ καὶ $\eta\mu \frac{1}{z} = 1$ ὑανοποιοῦνται ὑπὸ μιᾶς ἀπειρίας τιμῶν τοῦ z , ἥτοι: $z = \frac{1}{2k\pi i}$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ καὶ $z = \frac{1}{\frac{1}{2}(4k+1)\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ἀντιστοι-
χως καὶ αἱ ὁποῖαι (ἀμολολογίαι) ἔχουν τὸ σημεῖον $z = 0$ ὡς σημεῖον συσσωρεύσεως.

Ἡ συμπεριφορὰ τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς ἓνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον περι-
γράφεται ὑπὸ τοῦ θεωρήματος τῶν Casorati-Weierstrass, ἥτοι:

Θεώρημα IV-8-1. Τὸ σημεῖον z_0 εἶναι οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$, ἂν διὰ τᾶδε δευχοῦς δετιμῶν ἀριθμῶν ϵ καὶ δ καὶ διὰ τᾶδε μιχαδιῶν ἀριθμὸν b ὑπάρχη ἓνα (τουλάχιστον) σημεῖον z υἑίμενον ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z - z_0| = \delta$, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|f(z) - b| < \epsilon$.

Ἐν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἔχομεν: Εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ οὐσιῶδους ἀνωμά-
λου σημείου z_0 τῆς $f(z)$ αὕτη δύναται νὰ πλησιάσῃ οἰονδῆποτε μιχαδιὸν
ἀριθμὸν b .

V. Μεμονωμένα ἰδιόσονται σημεῖα. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z)$ καὶ τὸ σημεῖον z_0 τὸ ὁ-
ποῖον εἶναι εἴτε πόλος εἴτε οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον αὐτῆς. Θὰ λέγωμεν ὅτι τοῦ-

το είναι ένα μεμονωμένον ιδιάζον σημείον αὐτῆς, ἐὰν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐν $\delta > 0$ τοιοῦτον, ὥστε ὁ κύβλος $|z - z_0| = \delta$ δὲν ἐγκυλίνει ἄλλα ιδιάζοντα σημεία ἐντός τοῦ z_0 .

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μιᾶς ὠρισμένης περιοχῆς ἐντός τοῦ θεωρηθέντος ιδιάζοντος σημείου εἰς τὸ ὁποῖον δυνατόν νὰ μὴν εἶναι ὁμαλὴ, ἢ διαφορετικὰ: Εἰς μίαν ὠρισμένην περιοχὴν ἑνὸς μεμονωμένου ιδιάζοντος σημείου μιᾶς συναρτήσεως δὲν ὑπάρχουν ἄλλα ιδιάζοντα σημεία αὐτῆς.

VI Αἰρομένη ἀνώμαλία. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἡ ὁποία ἔχει τὸ z_0 οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ ὑπάρχει, τότε δυνάμεθα ν' ἀποδώσωμεν εἰς τὴν συνάρτησιν $f(z)$ εἰς τὸ z_0 τιμὴν ἴσπν πρὸς τὸ $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, ἥτοι: $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν εἰς τὸ σημεῖον z_0 αἰρομένην ἀνώμαλίαν.

Κλασσικόν παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{\eta\mu z}{z}$ μέ τὸ σημεῖον $z=0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον.

Ἐπειδὴ $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\eta\mu z}{z} = 1$, ἐὰν διὰ $z=0$ ἀποδώσωμεν εἰς τὴν συνάρτησιν τὴν τιμὴν $f(0)=1$, ἐπιτυχάνομεν ἄρσιν τῆς ἀνώμαλίας.

VII Ἀνώμαλία εἰς τὸ ἄπειρον. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ ἔχει τὸ σημεῖον $z=\infty$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον ἢ πόλον, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\varphi(z) = f(1/z)$ ἔχη τὸ σημεῖον $z=0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον ἢ πόλον ἀντιστοίχως. Π.χ. ἡ συνάρτησις $f(z) = z^2$ ἔχει τὸ σημεῖον $z=\infty$ πόλον τάξεως $n=2$, διότι ἡ συνάρτησις $\varphi(z) = f(1/z) = \frac{1}{z^2}$ ἔχει τὸ σημεῖον $z=0$ πόλον τάξεως $n=2$. Ἡ συνάρτησις $f(z) = e^z$ ἔχει τὸ $z=\infty$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον, διότι ἡ $\varphi(z) = f(1/z) = e^{1/z}$ ἔχει τὸ $z=0$ οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον.

VIII. Κλαδιὰ σημεία. Τὰ κλαδιὰ σημεία τὰ ὁποῖα ἐμελετήθησαν εἰς τὴν §3 εἶναι καὶ αὐτὰ οὐσιῶδη ἀνώμαλα σημεία τῆς συναρτήσεως. Εἰς τὴν §3 περιωρίσθημεν εἰς ἓνα στοιχειώδη ὄρισμόν τῶν κλαδιῶν σημείων, καθ' ὅτι μία βαθυτέρα θεώρησις τοῦ θέματος τούτου ἐξέρχεται τοῦ σκοποῦ τοῦ παρόντος βιβλίου. Σχετικῶς ἰσχύει τὸ ἀνὸλουθον θεώρημα τὸ ὁποῖον διατυποῦμεν ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα IV-8-2. Ἦνα ἓνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον z_0 μιᾶς ἀναλυτικῆς

συναρτήσεως $f(z)$ είναι υλαδιούν σημείον πρέπει ναί άρμεί είς κάποιαν υυυλι-
μήν περιοχίν, δηλ. $0 \leq |z - z_0| < r$, αύτου του σημείου υάθε υλάδος της συναρ-
τήσεως $f(z)$ να έχη την μορφήν $\Phi(\sqrt[n]{z - z_0})$ εάν $z_0 \neq \infty$, ή την μορφήν $\Phi(1/\sqrt[n]{z})$ εάν
 $z_0 = \infty$, όπου Φ είναι μία αναλυτική συνάρτησις ή οποία δέν έχει σύσιώδη άνωμα-
λα σημεία (δυνατόν να έχη πόλους) είς τον υύυυλον $|z| < r^{1/n}$. 1)

Παραδείγματα 1%. Η συνάρτησις $f(z) = \sqrt[5]{z - 3i}$ έχει υλαδιούν σημείον τό $z_0 = 3i$

2%. Η συνάρτησις $f(z) = \log(z^2 + z + 1)$ έχει ως υλαδιυά σημεία τάς ρίδασ της έεισώ-
 σεως $z^2 + z + 1 = 0$, ήτοι τά σημεία $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ και $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

3%. Η συνάρτησις $f(z) = \sqrt{\log z}$ έχει τρία υλαδιυά σημεία, τά $1, 0, \infty$.

Άσκαις: Να εξετασθ ή πρόσ τά ιδιάδοντα σημεία ή συνάρτησις $f(z) = \text{τεμ}(\frac{1}{z})$.

Λύσις: Έπειδή $\text{τεμ}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{\text{συν}(1/z)}$ τά ιδιάδοντα σημεία είναι ατά διά τά όποία
 έχομεν $\text{συν}(1/z) = 0$, δηλ. τά σημεία όπου $\frac{1}{z} = (2\eta + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ή $z = 2/(2\eta + 1)\pi$, όπου
 $\eta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Έπί πλέον και τό σημείον $z = 0$ είναι άνώμαλον σημείον, διότι ή $f(z)$ δέν όρίσε-
 ται είς τουτο.

Θά εξετάσωμεν ήδη μή τυχόν τ' άνωτέρω σημεία είναι πόλοι της $f(z)$ και μά-
 λιστα άπλοι πόλοι αύτης. Πρός τούτοις εξετάσωμεν, εάν ύπάρχη τό όριον.

$$\lim_{z \rightarrow 2/(2\eta+1)\pi} \left\{ z - \frac{2}{(2\eta+1)\pi} \right\} \cdot \text{τεμ}\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 2/(2\eta+1)\pi} \frac{z - 2/(2\eta+1)\pi}{\text{συν}(1/z)}$$

(Έφαρμόδοντες τον υανόνα έ'Hospital)

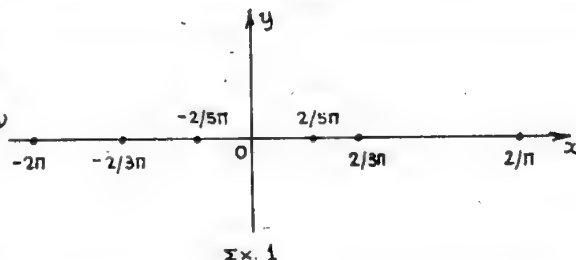
$$= \lim_{z \rightarrow 2/(2\eta+1)\pi} \frac{1}{-\eta\mu(1/z)\{-1/z^2\}} = \frac{\{2/(2\eta+1)\pi\}^2}{\eta\mu(2\eta+1)\pi/2} = \frac{4(-1)^\eta}{(2\eta+1)^2 \cdot \pi^2} \neq 0.$$

Όθεν, τά ιδιάδοντα σημεία $z = 2/(2\eta + 1)\pi$, $\eta = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ είναι πόλοι τάξεως
 ένα, δηλ. άπλοι πόλοι.

Έπειδή πέριε έυάστου έε αύτων δύνάμεθα να χράψωμεν έναν υύυυλον μέ αυτί-

1) Μία αναλυτική συνάρτησις $\Phi(z)$ ώρισμένη είς ένα άνοιγτόν σύνόλον G , ή όποία δέν έχει
 ιδιάδοντα σημεία έυτός από πόλους τό πολύ, υαθείται μέρόμοργος έν G .

να $\delta > 0$ κατάληκτον ώστε εντός αυτού να μην υπάρχει άλλος πόλος, διά του-
το τὰ ανωτέρω σημεία αποτελούν μεμο-
νωμένα ιδιάζοντα σημεία. Τους ανωτέρω
πόλους δυνάμεθα νὰ τοὺς τοποθετήσωμεν
κατὰ διάταξιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. σχ. 1).



Τέλος ἄς ἐξετάσωμεν τὴν εἰδὸς ιδιάζον
σημεῖον εἶναι τὸ $z=0$. Ἐπειδὴ δὲν δυνά-

μεθα νὰ εὕρωμεν ἓναν ἀμέραιον τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχωμεν: $\lim_{z \rightarrow 0} (z-0)^n \cdot \frac{1}{\sin(1/z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^n}{\sin(1/z)} = A \neq 0$,
ἔπεται ὅτι τὸ $z=0$ εἶναι ἓνα σύσιωδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς $f(z)$. Ἐπὶ πλεον δὲ καὶ ὅτι
υῦντος μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ αὐτὴν ὅσοδήποτε μικρὰ περιέχει ιδιάζοντα
σημεῖα (πόλους) τῆς $f(z)$, ἔπεται ὅτι τὸ $z=0$ εἶναι ἓνα μὴ μεμονωμένον ιδιάζον ση-
μεῖον τῆς $f(z)$.

Ἀσκήσεις:

1. χρησιμοποιοῦντες τοὺς κανόνες παραγωγίσεως εὑρετε τὰς παραγώγους τῶν
κάτωδι ἀναλυτικῶν συναρτήσεων:

- i) $f(z) = \sqrt{z}$, ii) $f(z) = \sin^2(2z+1)$, iii) $f(z) = (z+3i)^{2z+3}$, iv) $f(z) = \log(z^2+2z+1)$,
v) $f(z) = z \cdot \operatorname{toξ} \log z$, vi) $f(z) = e^{\eta \mu z}$.

2. Νὰ υπολογισθοῦν οἱ κάτωδι λογάριθμοι:

- i). $\log 4$, ii). $\log(-4)$, iii). $\log i$, vi) $\log(2-3i)$, v) $\log(-2+3i)$.

3. Νὰ εὕρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωδι ἐκφράσεων:

- i) $1^{\sqrt{2}}$, ii) 2^i , iii). $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$, iv) $(3-4i)^{1+i}$, v). $(3+4i)^{1+i}$

4. Νὰ υπολογισθοῦν αἱ κάτωδι τιμαί:

- i) $\operatorname{toξ} \eta \mu \frac{1}{2}$, ii). $\operatorname{toξ} \eta \mu i$, iii) $\operatorname{toξ} \sin 2$, iv) $\operatorname{toξ} \epsilon \phi(1+2i)$, v) $\operatorname{Ar} c \cos 2i$, vi) $\operatorname{Ar} c \tanh(i)$

5. Νὰ εὕρεθοῦν πᾶσαι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων:

- i). $\eta \mu z + \sin z = 2$, ii) $\eta \mu z - \sin z = 1$, iii) $\sin z = \cosh z$, iv) $\eta \mu z = i \sinh z$.

6. Εἰς ἐκάστην τῶν ἀνωλούθων συναρτήσεων εὑρατε καὶ ὀνομάσατε τὰ ἰδιόζοντα σημεῖα εἰς τὸ z -ἐπίπεδον:

i) $\frac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$ ii) $\frac{1}{z-z^3}$ iii) $\frac{e^z}{1+z^2}$ iv) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z}$

Ἀπάντ. i) $z=-1 \pm i$ ἀπλοὶ πόλοι, ii) $z=0, z=\pm 1$ ἀπλοὶ πόλοι καὶ $z=\infty$ εἶναι μηδενίσον τρίτης τάξεως.

iii) $z=\pm i$ εἶναι ἀπλοὶ πόλοι καὶ $z=\infty$ εἶναι οὐσιώδεις ἀνώμαλον.

iv) $z=2k\pi i$ ($k=\pm 1, \pm 2, \dots$) εἶναι ἀπλοὶ πόλοι καὶ $z=\infty$ εἶναι οὐσιώδεις ἀνώμαλον σημείον (τοῦτο δὲ εἶναι τὸ ὁριακὸν σημείον τῶν ἀνωτέρω πόλων).

7. Ὁμοίως:

i) $\frac{\log(z+3i)}{z^2}$, ii) $\frac{1}{z^3(2-\sin z)}$, iii) $\sqrt{z(z^2+1)}$.

Ἀπάντ. i) $z=-3i$ κλαδικὸν σημείον, $z=0$ πόλος δευτέρα τάξεως.

ii) $z=0$ πόλος τρίτης τάξεως, $z=2k\pi \pm i \log(2+\sqrt{3})$, ὅπου $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ εἶναι πόλοι πρώτης τάξεως, $z=\infty$ (ὁριακὸν σημείον τῶν πόλων) εἶναι οὐσιώδεις ἀνώμαλον σημείον.

iii) $z=0, z=\pm i$ εἶναι κλαδικὰ σημεία.

8. Ὁμοίως:

i) $e^{-\frac{1}{z^2}}$, ii) $\frac{1}{\pi \mu z}$, iii) $\frac{\sin z}{z^2}$, iv) $\coth \pi \frac{1}{z}$.

Ἀπάντ. i) Τὸ $z=0$ εἶναι οὐσιώδεις ἀνώμαλον, τὸ $z=\infty$ εἶναι ἓνα ὁμαλὸν σημείον.

ii) $z=k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) εἶναι ἀπλοὶ πόλοι καὶ τὸ $z=\infty$ εἶναι ὁριακὸν σημείον τῶν ἀνωτέρω πόλων.

iii) $z=0$ εἶναι πόλος δευτέρας τάξεως καὶ $z=\infty$ εἶναι οὐσιώδεις ἀνώμαλον.

iv) $z=0$ οὐσιώδεις ἀνώμαλον.

9. Ὁμοίως:

i) $(z^2+1)/z^{3/2}$ ii) $\frac{1}{\pi \mu(1/z^2)}$ iii) $\frac{\sin z}{z^2}$ iv) $e^{\varphi^2 z}$

Ἀπάντ. i) $z=0$ καὶ $z=\infty$ κλαδικὰ σημεία, ii) $z=1/\sqrt{\pi \mu}$, $\mu=\pm 1, \pm 2, \dots$ ἀπλοὶ πόλοι,

$z=0$ οὐσιώδεις ἀνώμαλον, $z=\infty$ πόλος δευτέρας τάξεως.

iii) $z=0$ πόλος δευτέρας τάξεως, $z=\infty$ οὐσιώδεις ἀνώμαλον.

iv) $z=(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) πόλοι δευτέρας τάξεως, $z=\infty$ (ὁριακὸν σημείον τῶν πόλων) οὐσιώδεις ἀνώμαλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

§1. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ $w = \frac{az+b}{cz+d}$

Θεωρούμεν τόν μετασχηματισμόν:

$$w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (1)$$

όπου οί a, b, c, d εἶναι μιγαδικοί καί ἡ ὀρίζουσα $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Οὗτος ὀρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπειριόνησιν τοῦ ἐπειτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ἰδίου. Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός καλεῖται *γραμμικός υἱασματιυός μετασχηματισμός ἢ μετασχηματισμός τοῦ Möbius ἢ ὁμογραφικός μετασχηματισμός*.

ι). Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι: $z \neq -\frac{d}{c}$ καί $c \neq 0$, τότε ἡ εἰκάν $S(z)$ ἑνός τυχόντος σημείου z θά παρέχεται μονοσημάντως ὑπὸ τοῦ τύπου (1).

Τὸ σημεῖον $z = -\frac{d}{c}$ ἔχει ὡς εἰκόνα, μέσω τοῦ (1), τὸ κατ' ἐυδοκὴν σημεῖον $w = \infty$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, ἥτοι:

$$w = S\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad \text{ἐάν } c \neq 0$$

τοῦ δέ σημείου $z = \infty$ ἡ εἰκάν δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$w = S(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c}, \quad c \neq 0.$$

ii) Ἐάν $c=0$, ὁ (1) γράφεται $w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$ καί ἔπειδή

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \implies a \cdot d \neq 0.$$

Ὡστε εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσηι ἔχομεν:

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} \quad (1a) \quad \text{ὅπου } a \cdot b \neq 0.$$

Οὕτω ἡ εἰκάν $S(z)$ καθε σημείου z δίδεται μέσω τοῦ τύπου (1a), τοῦ δέ σημείου $z = \infty$ ἡ εἰκάν εἶναι $w = S(\infty) = \infty$.

iii) Ἐάν $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, τότε $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$ καί ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$w = S(z) = \frac{c\lambda z + d\lambda}{cz+d} = \lambda$$

Οὕτω ἔχομεν τὴν τετριμένην περίπτωσηι, ὅπου $w = S(z) \equiv \lambda$ δηλ. καθε ση-

μείον του μιγαδικού επιπέδου απεικονίζεται διά του ανωτέρω μετασχηματισμού εις τό αυτό σημείον λ του μιγαδικού επιπέδου.

Διά του τύπου (1) ὁρίζεται καί ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός, ἥτοι:

$$z = S^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} \quad (2)$$

Οἱ μετασχηματισμοί S καί S^{-1} εἶναι ἀντίστροφοι ὁ ἕνας τοῦ ἄλλου.

Ὁ μετασχηματισμός (1) δύναται νά γραφῇ καί ὑπό τήν μορφήν:

$$AZW + BZ + CW + D = 0 \quad (3)$$

ὅστις εἶναι γραμμικός ὡς πρὸς z καί γραμμικός ὡς πρὸς w , δι'αυτό ὁ (1) καλεῖται καί ἀγραμμικός μετασχηματισμός.

Ἐνα σημείον z τοῦ ἐπιτεταμένου μιγαδικοῦ επιπέδου καλεῖται σταθερόν σημείον διά τόν γραμμικόν μιγαδικόν μετασχηματισμόν (1), ἐάν τοῦτο ικανοποιῇ τήν ἐξίσωσιν:

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \quad (4) \quad \text{ἢ}$$

$$cz^2 - (a-d)z - b = 0 \quad (5)$$

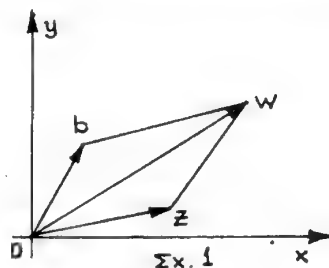
Ἡ (5) εἶναι μία ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ καί ἔχει τό πολὺ δύο ρίζας, ἀρκεῖ οἱ συντελεσταί αὐτῆς νά μὴν μηδενίζωνται πάντες συγχρόνως.

Μία διερεύνησις τῆς (5) ἐπαφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τὸν ἀναγνώστην.

§2. ΕΙΔΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν αἱ κατωθι εἰδικαί περιπτώσεις τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) τῆς § 1.

I. Ὁ μετασχηματισμός $w = z + b$ (M_1) καλεῖται παράλληλος μεταφορά. Ὅπως δεικνύεται καί εἰς τό Σχ. 1, τό σημείον z μεταφέρεται διά τοῦ μετασχηματισμοῦ (M_1) εἰς τό σημείον w .



Γενικῶς, κάθε χωρίον μεταφέρεται διά τοῦ ανωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς ἓνα χωρίον ἴσον πρὸς τό ἀρχικόν.

II. Ὁ μετασχηματισμός $w = \frac{1}{z}$ (M_2) καλεῖται ἀντιστροφή. Οὗτος δημιουργεῖ

μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τῶν σημείων $z (\neq 0)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ἰδίου. Εἰδιωκῶς τὸ $z=0$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $w=\infty$ καὶ τὸ $z=\infty$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $w=0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εἰκὼν τοῦ κύκλου $|z|=\varepsilon$ εἶναι ὁ κύκλος $|w|=\frac{1}{\varepsilon}$. Ἐπίσης μία ε -περιοχή $|z|<\varepsilon$ τῆς ἀρχῆς, μέτῃ τὴν ἀρχὴν ἐξαιρουμένην, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ἀπείρου $|w|>\frac{1}{\varepsilon}$.

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις:

$$a(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0 \quad (1)$$

καὶ ἡ ὁποία διὰ $a \neq 0$ παριστᾷ ἕναν κύκλον, ἐνῶ διὰ $a=0$ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν.

Ἐάν εἰς τὸν τύπον (M_2) θέσωμεν $z=x+iy$ καὶ $w=u+iv$, τότε οὗτος γράφεται:

$$u+iv = \frac{1}{x+iy} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν:

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad (3a)$$

$$\text{ἢ} \quad x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2} \quad (3b)$$

Οὕτω, λόγῳ τῶν (3a), ἢ (3b) (1) μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\delta(u^2+v^2)+\beta u-\gamma v+a=0 \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (4) συμπεραίνομεν τὰ ὑάτωδι:

- i) Ἐνας κύκλος ($a \neq 0$) μὴ διερχόμενος διὰ τῆς ἀρχῆς ($\delta \neq 0$) εἰς τὸ z -ἐπίπεδον μετασχηματίζεται ὑπὸ τοῦ (M_2) εἰς τὸ w -ἐπίπεδον εἰς ἕναν κύκλον μὴ διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς.
- ii) Ἐνας κύκλος εἰς τὸ z -ἐπίπεδον διερχόμενος διὰ τῆς ἀρχῆς ($\delta=0$) μετασχηματίζεται ὑπὸ τοῦ (M_2) εἰς τὸ w -ἐπίπεδον εἰς μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν μὴ διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς.
- iii) Μία εὐθεῖα γραμμὴ ($a=0$) τοῦ z -ἐπιπέδου μὴ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς ($\delta \neq 0$) μετασχηματίζεται ὑπὸ τοῦ (M_2) εἰς τὸ w -ἐπίπεδον εἰς ἕναν κύκλον διερχόμενον διὰ τῆς ἀρχῆς.
- iv) Μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς ($a=\delta=0$) τοῦ z -ἐπιπέδου μετασχηματίζεται ὑπὸ τοῦ (M_2) εἰς μίαν εὐθεῖαν τοῦ w -ἐπιπέδου διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς.

ν) Ἡ εὐθεΐα $x = C_1$, ($C_1 \neq 0$) μετασχηματίζεται εἰς τὸν κύβον $u^2 + v^2 - \frac{u}{C_1} = 0$ (5), ὅστις ἐφάπτεται τοῦ u -ἄξονος εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

νι) Ἡ εὐθεΐα $y = C_2$, ($C_2 \neq 0$) μετασχηματίζεται εἰς τὸν κύβον $u^2 + v^2 + \frac{v}{C_2} = 0$ (6) ὅστις ἐφάπτεται τοῦ u -ἄξονος εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

νii) Τὸ ἡμιεπίπεδον $x > C_1$ ($C_1 > 0$) ἔχει ὡς εἰκόνα μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ (M_2) τὸ χωρίον.

$$\frac{u}{u^2 + v^2} > C_1 \quad (7) \quad \text{ἢ} \quad \left(u - \frac{1}{2C_1}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2C_1}\right)^2 \quad (8)$$

Λόγω τῆς (8) τὴ εἰκὼν καθε σημείου εἰς τὸ ἀνωτέρω θεωρηθὲν ἡμιεπίπεδον καίτοι ἐντὸς τοῦ κύβου ποὺ ἔχει ἐξίσωσιν $\left(u - \frac{1}{2C_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2C_1}\right)^2$.

Ἀντιστρόφως, καθε σημεῖον καίτοι ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω κύβου θὰ εἶναι τὴ εἰκὼν κάποιου σημείου τοῦ ἀνωτέρω ἡμιεπιπέδου. Οὕτω ἡ εἰκὼν τοῦ ἡμιεπιπέδου εἶναι ὁλόκληρον τὸ κυκλικὸν χωρίον.

III. Ὁ μετασχηματισμός $w = a \cdot z$ (M_3) a : μιγαδικὸς ἀριθμὸς, καλεῖται περιστροφή. Ἐάν $a = |a| \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot e^{i\theta}$ καὶ $z = |z| \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi}$, τότε λόγω τῆς (3) θὰ ἔχωμεν:

$$w = \rho \cdot r \cdot e^{i(\theta + \varphi)} \quad (1).$$

Οὕτω ὁ μετασχηματισμὸς ὁ ὁρισθόμενος ὑπὸ τοῦ τύπου (3) ἀπεικονίζει καθε σημεῖον $z (\neq 0)$ μέ πολικὰς συντεταγμένας (r, φ) εἰς τὸ μή μηδενικὸν σημεῖον w ἔχον πολικὰς συντεταγμένας $(\rho \cdot r, \theta + \varphi)$. Αὕτη ἡ ἀπεικόνισις ἐπιφέρει μίαν περιστροφὴν τοῦ ἀρχικοῦ διανύσματος z περὶ τῆς ἀρχῆς κατὰ γωνίαν $\theta = \arg a$ καὶ ἐπίσης μίαν «διαστολὴν», ἐάν $\rho > 1$ ἢ «συστολὴν» ἐάν $\rho < 1$ τοῦ διανύσματος z ὑπὸ τοῦ παράγοντος $|a| = \rho$. Ἡ εἰκὼν δοθέντος χωρίου τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἶναι ἓνα χωρίον ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

IV. Ὁ μετασχηματισμὸς $w = az + b$ (M_4), ὅστις συνίσταται ἀπὸ μίαν περιστροφήν καὶ μίαν παράλληλην μεταφορὰν καλεῖται γραμμικὸς μετασχηματισμὸς. (Οὗτος εἶναι ἡ σύνθεσις τῶν μετασχηματισμῶν I καὶ III.)

• Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς μετασχηματισμοὺς (M_1), (M_2), (M_3) παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ μετασχηματισμὸς (1) τῆς § 1 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ κατάλληλος σύνθεσις τῶν κατωθι μετασχηματισμῶν:

$$w = z + b, w = \frac{1}{z}, w = a \cdot z,$$

οί όποιοι υαλοϋνται υαί γεννήτορες τοϋ γραμμικοϋ υλαιοματιοϋ μεταοχηματιομοϋ (1).

Οϋτω ό γραμμικός υλαιοματιός μεταοχηματιομοϋ $w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ δϋνεται νά θεωρηθῇ ως ἡ σύνθεοις τῶν υάτωδι μεταοχηματιομῶν:

$$Z = cz + d, W = \frac{1}{Z}, w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot W$$

Εϋνόλως δυνάμεθα νά διαπιοτώομεν ότι οι μεταοχηματιομοί $w = z + b$ υαί $w = az$ άπειονίοουν τῖν περιφέρειαν ἢ τῖν εϋδειαν εἰς περιφέρειαν ἢ εϋδειαν αντίοτοιως. Ό δέ μεταοχηματιομοϋ $w = \frac{1}{z}$, όπως εἶδομεν, άπειονίοει άλλοτε μὲν τῖν περιφέρειαν εἰς περιφέρειαν, άλλοτε δέ εἰς εϋδειαν υαί τῖν εϋδειαν εἰς εϋδειαν ἢ περιφέρειαν.

Ἐάν θεωρήοωμεν τῖν εϋδειαν γραμμῖν ως μῖαν περιφέρειαν ὑπό τῖν εϋ-ρεῖαν ἔννοιαν (έχουοα άπειρον αϋτῖνα), τότε ἐν τῶν άνωτέρω εϋνόλως δυνάμεθα νά ἔοαγάωμεν τό υατωτέρω οπουοαῖον συμπέραομα:

Πρόταοις V-2-1. Οι γραμμικοί υλαιοματιομοί μεταοχηματιομοί διατηροϋν τας ὑπό εϋρεῖαν ἔννοιαν περιφερείαο.

§3. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΛΟΓΟΥ

Ἐοτωοαν τά διαυευριμένα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 . Καλοϋμεν διπλοϋν λόγον αϋτῶν υαί τόν ουμβολίομεν μὲ (z_1, z_2, z_3, z_4) τῖν υάτωδι παράοταοιν:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}$$

Δυνάμεθα νά ἔπειτεῖνωμεν τῖν ἔννοιαν τοϋ διπλοϋ λόγου υαί εἰς τετράοας σημείων τοϋ ἔπειτεταμὲνου μιχαοδιοϋ ἔπιπέδοϋ, όπου τό ἔνα ἐξ αϋτῶν εἶναι τό ∞ . Οϋτω, π.χ. θά ἔωμεν:

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Κατ'άνάλογον τρόπον εϋρίοιομεν τας τιμάο τῶν υάτωδι διπλῶν λόγων:

$$(z_1, z_2, \infty, z_4), (z_1, \infty, z_3, z_4), (\infty, z_2, z_3, z_4).$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω μία ἄμεσος διαπίστωσις εἶναι ἡ κατωθί:

$$z = (z, 0, 1, \infty) = (0, z, \infty, 1) = (1, \infty, z, 0) = (\infty, 1, 0, z).$$

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῶν διπλῶν λόγων:

$$(w, w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4) \quad (1).$$

Ἐάν εἰς τὰ διαυευριμένα σημεῖα z_2, z_3, z_4 ἀντιστοιχίσωμεν τὰ σημεῖα $0, 1, \infty$, τότε ἡ (1) γράφεται:

$$(w, 0, 1, \infty) = (z, z_2, z_3, z_4) \quad (2)$$

Ἐπειδὴ εἶναι $(w, 0, 1, \infty) = w$, ἡ (2) γίνεται:

$$w = \frac{z - z_2}{z - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \quad (3)$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται:

Πρότασις V-3-1. Ἐάν z_2, z_3, z_4 εἶναι τρία διαυευριμένα σημεῖα τοῦ ἐπεκτεταμένου μιχαδίου ἐπιπέδου, ὑπάρχει ἓνας γραμμικός υλασματιὺς μετασχηματισμὸς $w = T(z)$, ὁποῖος ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα ταῦτα εἰς τὰ $0, 1, \infty$ ἀντιστοίχως.

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν ἔχομεν:

$$w = T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$$

καὶ

$$T(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται:

Πόρισμα V-3-1. Ὁ διπλοῦς λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ z_1 διὰ τοῦ μονοσημάντως ὀρισμένου ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως μετασχηματισμοῦ $w = Tz$, ἥτοι: $(z_1, z_2, z_3, z_4) = Tz_1$.

Πρότασις V-3-2. Ἐστωσαν τέσσαρα διαυευριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3, z_4 τοῦ ἐπευτεταμένου μιχαδίου ἐπιπέδου καὶ ὁ γραμμικός υλασματιὺς μετασχηματισμὸς $w = Sz$. Τότε ἰσχύει:

$$(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

δηλ. ὁ γραμμικός υλασματιὺς μετασχηματισμὸς διατηρεῖ τὸν διπλοῦν λόγον.

Απόδειξις: Ὡς θεωρήσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $w = Tz$ ποὺ ὀρίσθη εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν καὶ ὥς εὕρωμεν τὰς εἰκόνας τῶν Sz_1, Sz_2, Sz_3 ὑπὸ τοῦ TS^{-1} . Πρὸς τοῦτοις ἔχομεν:

$$TS^{-1}(Sz_1) = Tz_1 = 0, TS^{-1}(Sz_2) = Tz_2 = 1, TS^{-1}(Sz_3) = Tz_3 = \infty.$$

Ἐπομένως βάσει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καὶ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος ἔχομεν:

$$(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4) = TS^{-1}(Sz_1) = Tz_1 = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

- Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν γραμμικὸν υλασματικὸν μετασχηματισμὸν ποὺ ἀπεικονίζει τρία διαμευριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3 εἰς τὰ διαμευριμένα σημεῖα w_1, w_2, w_3 ἀντιστοίχως, ἄρκει πρὸς τοῦτοις νὰ γράψωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$.

Τὸ ἀνωτέρω τὸ διατυπώμεν εἰς τὴν ὑάτωδι πρότασιν καὶ δίδομεν μίαν ξεχωριστὴν ἀπόδειξιν.

Πρότασις V-3-3. Ὑπάρχει ἀκριβῶς ἓνας γραμμικὸς υλασματικὸς μετασχηματισμὸς, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τρία διαμευριμένα σημεῖα z_1, z_2, z_3 τοῦ ἑπευτεταμένου μιγαδικοῦ ἐπιπέδου εἰς τρία διαμευριμένα σημεῖα w_1, w_2, w_3 αὐτοῦ.

Απόδειξις: Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{(w-w_1) \cdot (w_2-w_3)}{(w-w_3) \cdot (w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1) \cdot (z_2-z_3)}{(z-z_3) \cdot (z_2-z_1)} \quad (1),$$

λέγομεν ὅτι αὕτη ὀρίζει τὸν ἐν λόγῳ μετασχηματισμὸν.

Πράγματι, αὕτη γράφεται:

$$(z-z_3) \cdot (w-w_1) (z_2-z_1) \cdot (w_2-w_3) = (z-z_1) \cdot (w-w_3) (z_2-z_3) \cdot (w_2-w_1) \quad (2).$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) θέσωμεν $z = z_1$, τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (2) γίνεταί μηδέν καὶ ἔξ αὐτοῦ ἔπεται, ὅτι $w = w_1$. Ἀναλόγως, ἔὰν θέσωμεν $z = z_3$, τὸ ἀριστερόν μέλος γίνεταί μηδέν καὶ ἔξ αὐτοῦ ἔπεται, ὅτι $w = w_3$. Τέλος διὰ $z = z_2$ ἐπιτυγχάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(w-w_1) \cdot (w_2-w_3) = (w-w_3) \cdot (w_2-w_1),$$

ἢ ὁποία ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $w = w_2$.

Τέλος ἄς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν ὅπου ἓνα τῶν δοθέντων σημείων τοῦ W -ἐπιπέδου ἔστω π.χ τὸ $W_2 = \infty$. Τότε ἡ εἰσώσις (1) γράφεται:

$$\frac{(W-W_1)(1-\frac{W_3}{W_2})}{(W-W_3)(1-\frac{W_1}{W_2})} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $\frac{1}{W_2} = 0$, ἡ (3) δίδει:

$$\frac{W-W_1}{W-W_3} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \quad (4)$$

Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ὁρίζεται ἓνας γραμμικός υλαιοματινός μετασχηματισμός.

• Παράδειγμα: Νά προσδιορισθῇ ὁ γραμμικός υλαιοματινός μετασχηματισμός $W=S(z)$, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1=1$, $z_2=0$, $z_3=-1$, ἀντιστοιχῶς, εἰς τὰ σημεῖα $W_1=i$, $W_2=\infty$, $W_3=1$.

Λύσις: Ἀντιμαδιστῶντες εἰς τὴν εἰσώσιν (4) τὰ z_1, z_2, z_3 καὶ W_1, W_3 , εὐρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις:

$$W = \frac{(1+i)z + (i-1)}{2z}$$

Εὐνόλως ἐπαληθεύομεν, ὅτι τὰ δοθέντα σημεῖα τοῦ z -ἐπιπέδου ἀπεικονίζονται εἰς τὰ δοθέντα σημεῖα τοῦ W -ἐπιπέδου.

Πρότασις V-3-4. Ὁ διπλοῦς λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι πραγματινός ἀριθμός, ἔαν καὶ μόνον ἔαν, τὰ τέσσαρα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾷ περιφερείᾳ ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν (δηλ. ἐπὶ μιᾷ περιφερείᾳ ἢ μιᾷ εὐθείᾳ).

Ἀπόδειξις: Ἄν θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα z_2, z_3, z_4 , τότε συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν V-3-1 ὑπάρχει ἓνας γραμμικός υλαιοματινός μετασχηματισμός ποῦ ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα ταῦτα εἰς τὰ σημεῖα $0, 1, \infty$ καὶ ἄς καθέσωμεν δεξιῶν τὸν τὸν μετασχηματισμόν $W = Tz$.

Ἐστω δέ $W_1 = Tz_1$. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν:

$$W_1 = (W_1, 0, 1, \infty) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

i) Ἐάν τὰ z_1, z_2, z_3, z_4 ἀνήκουν εἰς μίαν ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν περιφέρεια, τότε βάσει τῆς προτάσεως V-2-1 καὶ τὰ $W_1, 0, 1, \infty$ θὰ ἀνήκουν εἰς μίαν ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν

έννοιαν περιφέρειαν, ἐν προκειμένω δέ ταῦτα ἀνήκουν εἰς τὴν εὐθεΐαν τὴν ὀριζομένην ὑπὸ τῶν 0 καὶ 1. Κατὰ συνέπειαν ὁ λόγος $(w_1, 0, 1, \infty)$ δά εἶναι πραγματιῦς ἀριθμὸς καὶ ἴσος πρὸς τὸν πραγματιῦν ἀριθμὸν w_1 . Ὅθεν, ὁ λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι πραγματιῦς ἀριθμὸς.

ii) Ἐάν ὁ λόγος (z_1, z_2, z_3, z_4) εἶναι πραγματιῦς ἀριθμὸς, τότε καὶ τὸ w_1 εἶναι πραγματιῦς ἀριθμὸς ἥτοι τὰ $w_1, 0, 1, \infty$ ἀνήκουν εἰς τὴν εὐθεΐαν τὴν ὀριζομένην ὑπὸ τῶν 0 καὶ 1, βάσει δέ τῆς προτάσεως V-2-1 τὰ z_1, z_2, z_3, z_4 δά ἀνήκουν εἰς μίαν ὑπὸ τὴν εὐθείαν έννοιαν περιφέρειαν.

§4. ΕΙΔΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ.

I. Θεωροῦμεν τὸν γραμμιῦν υλασματιῦν μετασχηματισμόν:

$$w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \quad (1)$$

Λέγομεν ὅτι, ἐάν τὸ z_0 εὐρίσκειται εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον τοῦ z -ἐπιπέδου ὁ (1) ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐντὸς τοῦ μοναδιαίου κύκλου τοῦ w -ἐπιπέδου ἥτοι: $|w| \leq 1$.

Ἀπόδειξις: Ἐχομεν ὅτι:

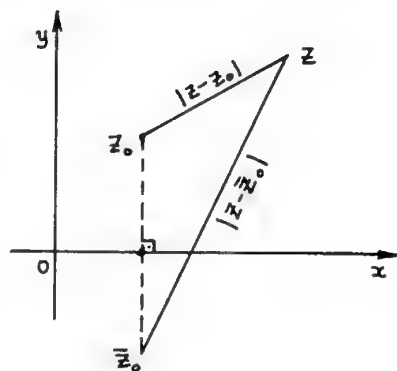
$$|w| = \left| e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \right| = \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου, ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ Σχ. 1, ἰσχύει:

$$|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0| \quad (3),$$

ἡ δέ ἰσότης εἰς τὴν (3) ἰσχύει, τότε καὶ μόνον τότε, ἐάν τὸ z εὐρίσκειται ἐπὶ τοῦ πραγματιῦ ἀξονος τῶν x . Ἐν τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$|w| \leq 1. \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$



Σχ. 1

• Ἐφαρμογή: Νά εὐρεθῇ ἓνας γραμμιῦς υλασματιῦς μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος νά ἀπεικονίσῃ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον τοῦ z -ἐπιπέδου εἰς τὸν μοναδιαῖον κύκλον τοῦ w -ἐπιπέδου καὶ τὰ σημεῖα i, ∞ εἰς τὰ σημεῖα $0, -1$ ἀντιστοίχως.

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τ' ἄνωτέρω, ὁ μετασχηματισμός δά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$w = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right) \quad (1)$$

Θέτοντες διά $z=i$ $w=0$, ή (1) γράφεται:

$$0 = e^{i\theta} \cdot \left(\frac{i - z_0}{i - \bar{z}_0} \right) \quad (2)$$

Ευ τής (2) λαμβάνομεν $z_0=i$.

Η (1) λοιπόν γίνεται

$$w = e^{i\theta} \cdot \left(\frac{1 - \frac{z}{i}}{1 + \frac{z}{i}} \right) \quad (3)$$

Θέτοντες εις την (3) διά $z=\infty$ $w=-1$ εύρισκομεν: $-1 = e^{i\theta}$.

Οθεν, ό (1) γράφεται τελειώς:

$$W = (-1) \cdot \frac{z-i}{z+i} = -\frac{z-i}{z+i}$$

• Αποδεικνύεται εύκολως, ότι υάθε μετασχηματισμός τής μορφής $W = e^{i\theta} \frac{z-z_0}{\bar{z}_0 \bar{z}-1}$, όπου $|z_0| < 1$, άπεικονίζει τον μοναδιαϊον δίσκον $|z| \leq 1$ εντός του μοναδιαϊου δίσκου $|W| \leq 1$ άμφιμονοσημάντως.

II. Ο μετασχηματισμός $W = \bar{z}$ (1) άπεικονίζει άμφιμονοσημάντως το μιγαδικόν επίπεδον επί του ίδιου. Ούτος διατηρεί τας περιφερείας καί την εύθειαν την άπεικονίζει εις εύθειαν

Ο μετασχηματισμός $W = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ (2), $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, όστις δύναται νά θεωρηθῇ ως ή σύνθεσις των μετασχηματισμών $W = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ καί $W = \bar{z}$ καλεϊται άντι-Möbius μετασχηματισμός.

Εύκόλως διαπιστοῦται ότι:

i) Οί άντι-Möbius μετασχηματισμοί διατηροῦν τας υπό εύρειαν έννοιαν περιφερείας.

Ο άντι-Möbius μετασχηματισμός πού άπεικονίζει τά τρία διακευριμένα σημεία z_1, z_2, z_3 εις τά διακευριμένα σημεία w_1, w_2, w_3 θά δίδεται υπό του τύπου:

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad (1)$$

Ευ του (1) λαμβάνομεν:

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad (2)$$

Αλλά $(\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$, τότε καί μόνον τότε, όταν ό διπλούς λόγος

(z, z_1, z_2, z_3) είναι πραγματικός αριθμός. Όθεν θα έχουμε:

ii) Οι αντι-Möbiους μετασχηματισμοί διατηρούν τον διπλό τον λόγο, τότε και μόνο τότε, όταν αυτός είναι πραγματικός αριθμός.

• § 5. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Είς την παρούσαν § υφίνομεν συόπιμον νά δώσωμεν μεριυάς ενδιαφερούσας εφαρμογάς του γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ. Ὑπενθυμίζομεν εἰς τὸν ἀναγνώστην ὅτι, μία εὐθεῖα θεωρεῖται καὶ αὐτὴ μία ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν περιφέρεια μέ ἄπειρον αὐτῖνα. Μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῶν σημείων (a, b) θὰ συμβολίζεται μέ $\tilde{C}(a, b)$. Ἡ δὲ ἐξίσωσίς της, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι: $z = a + t \cdot b$, $t \in \mathbb{R}$. Ἐάν δὲ συμπεριλάβωμεν καὶ τὸ ∞ εἰς αὐτὴν, θὰ τὴν συμβολίζωμεν οὕτω: $\tilde{C}(a, b) \equiv C(a, b) \cup \{\infty\}$.

12/ Νά εὐρεθοῦν αἱ εἰσόνες τῶν κάτωθι ὑπὸ εὐρείαν ἔννοιαν περιφερειῶν διὰ τοῦ γραμμικοῦ κλασματικοῦ μετασχηματισμοῦ $w = \frac{z+i}{z-i}$. (1)

$$i) \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4}, \quad ii) |z - (1+i)| = 2, \quad iii) \tilde{C}(-i, 1+i)$$

Λύσις: Ἐν τῆς σχέσεως $w = \frac{z+i}{z-i}$ λαμβάνομεν:

$$z = \frac{i(w+1)}{w-1} \quad \text{καὶ} \quad \bar{z} = -\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} \quad (2)$$

i) Ἐχομεν:

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \iff \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16} \quad \text{καὶ δυνάμει τῶν (2) λαμβάνομεν:}$$

$$\left[\frac{i(w+1)}{w-1} - \frac{1}{2} \right] \cdot \left[-\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{16}$$

ἡ τελευταία, μετὰ τὰς πράξεις, γίνεται:

$$13(\bar{w}+w) - 16i(\bar{w}-w) + 19(w\bar{w}+1) = 0$$

ἢ θέτοντες $w = u+iv$, ὁπότε $\bar{w} = u-iv$, λαμβάνομεν:

$$19u^2 + 19v^2 + 26u - 32v + 19 = 0 \quad \text{ἢ} \quad \left(u + \frac{13}{19} \right)^2 + \left(v - \frac{16}{19} \right)^2 = \left(\frac{8}{19} \right)^2,$$

ἥτοι περιφέρεια κέντρου $w_0 = -\frac{13}{19} + i \frac{16}{19}$ καὶ αὐτῖνος $R = \frac{8}{19}$.

Ἄρα ἡ $\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} \xrightarrow{(1)} C: |w - w_0| = \frac{8}{19}$.

ii) Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἔχομεν:

$$|z - (1+i)| = 2 \iff (z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = 4 \quad \text{καὶ δόχῳ τῶν (2) λαμβάνομεν:}$$

$$\left[\frac{i(w+1)}{w-1} - 1 - i \right] \cdot \left[-\frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} - 1 + i \right] = 4 \quad \text{ή μετά τās πράξεις:}$$

$$3(\bar{w}+w) - 2i(\bar{w}-w) - 3w\bar{w} + 1 = 0$$

Θέτουμε $w = u+iv$, όποτε $\bar{w} = u-iv$, τελειωώς εύρισουμεν:

$$(u-1)^2 + (v+\frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9},$$

ήτοι περιφέρεια κέντρου $w_0 = 1-i\frac{2}{3}$ και άυτίνος $R = \frac{4}{3}$.

iii) Ός γνωστόν $\tilde{G}(-i, 1+i) = G(-i, 1+i) \cup \{\infty\}$ και

$$G(-i, 1+i) = \{z \in \mathbb{C} : z = -i + t(1+i), t \in \mathbb{R}\}.$$

Όθεν:

$$z = t + i(t-1) \quad (3)$$

Άλλά, λόγω τής (2),

$$z = \frac{i(w+1)}{w-1} \quad (4)$$

Έυ τών (3) και (4) λαμβάνουμεν:

$$\frac{i(w+1)}{w-1} = t + i(t-1), t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

ή θέτουμε $w = u+iv$ και έυτελοώντες πράξεις εύρισουμεν:

$$-v + i(u+1) = [tu - t - (t-1) \cdot v] + i[tv + (t-1)u - t + 1]$$

Έυ τής τελευταίας λαμβάνουμεν:

$$tu - t - (t-1) \cdot v = -v \quad (6)$$

$$tv + (t-1)u - t + 1 = u + 1 \quad (7)$$

Δί απαλοιφής του t , μεταξύ τών (6) και (7), τελειωώς εύρισουμεν:

$$u^2 + v^2 - u - v = 0 \quad \text{ή} \quad (u - \frac{1}{2})^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{2}{4}$$

ήτοι περιφέρεια C κέντρου $w_0 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ και άυτίνος $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Όστε ή $G(-i, 1+i) \xrightarrow{(1)} C : |w - w_0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Έπειδή έξ άλλου ή είνων του ∞ , μέσω του $w = \frac{z+i}{z-i}$, είναι τό 1, καδ'όσον

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+i}{z-i} = 1$, ισχύει δέ $1 \in C$, καδ'όσον:

$$|1 - w_0| = |1 - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i| = \frac{1}{2} |1 - i| = \frac{1}{2} \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

άρα τελειωώς έχομεν, ότι ή εύθεια $\tilde{G}(-i, 1+i)$ μέσω του $w = \frac{z+i}{z-i}$ άπειμονίσεται

είς τήν περιφέρειαν: $|w - w_0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

23. Κά δείχθη ότι ύπο του μετασχηματισμού $w = \frac{z+i}{z-i}$ το ήμιστινεδο

$\operatorname{Im}(z) \leq 0$ άπειμονίσεται στό μοναδιαίο κύκλο $|w| \leq 1$.

Απόδειξη Έχομεν $w \cdot \bar{w} = |w|^2 = \frac{z+i}{z+1} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1} = \frac{z\bar{z}+i(2+z+\bar{z})}{(z\bar{z}+1)-2\Im(z)} \leq 1$,
 διότι $z\bar{z}+1 > 0$ και $\Im(z) \leq 0$, έξ υποθέσεως.

32/ Να δειχθῇ ὅτι ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ ὁ μοναδιαῖος κύκλος $|z| < 1$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\Im(w) > 0$

Απόδειξη: Έχομεν: $\Im(w) = \frac{1}{2i} (w - \bar{w}) = \frac{1}{2i} \left[\frac{i(1-z)}{1+z} + \frac{i(1-\bar{z})}{1+\bar{z}} \right] = \frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}+z+\bar{z}} =$
 $= \frac{1-|z|^2}{1+x^2+y^2+2x} = \frac{1-|z|^2}{(1+x)^2+y^2} > 0. (z=x+iy)$ ὁθεν, $\Im(w) > 0$.

42/ Δίδεται τρίγωνο μέ κορυφές τα σημεῖα 0, 1, i.

Νά εὐρεθῇ γραμμική συνάρτηση πού νά ἀπεικονίση τὸ δοθέν τρίγωνο εἰς ἕνα ἄλλο ὁμοίο πρὸς αὐτό τέτοια, ὥστε τίς κορυφές 0, 1 νά τίς ἀπεικονίση στίς κορυφές $1+i$, 0 τοῦ ὁμοίου του.

Λύση: Ἡ ζητούμενη συνάρτηση εἶναι τῆς μορφῆς $w = az+b$. Θέτοντες $z=0, 1$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως σύμφωνα μέ τήν υπόθεσιν $w=1+i, 0$. Έχομεν λοιπόν πρὸς ἐπίλυση τὸ σύστημα: $1+i=b$ καί $0=a+b$.

Ὅθεν, $a=-1-i$, $b=1+i$. Ἡ γραμμική ἀπεικόνιση εἶναι $w=(1+i)(1-z)$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κορυφή i ἀπεικονίζεται εἰς τὸ σημεῖο 2.

52/ Νά μετασχηματισθῇ ἡ εἰκόνα τοῦ κυρίου $\Im \frac{z-2}{1} < 0$ ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = \frac{z+i}{z-i}$.

Λύση Έστω $z=x+iy$ καί ἡ σχέση $\Im \frac{z-2}{1} < 0$ γράφεται: $\Im \frac{x+iy-2}{1} < 0$
 ἢ $\Im [y+i(2-x)] < 0$ ἢ $2-x < 0$ ἢ $x > 2$. Έν τοῦ δοθέντος μετασχηματισμοῦ λαμβάνομεν: $z = \frac{i(w+1)}{w-1}$ (1) καί $\bar{z} = \frac{-i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1}$ (2).

Ἡ σχέση $x > 2$ ἢ $x-2 > 0$ γράφεται: $\frac{1}{2} (z+\bar{z}) - 2 > 0$ ἢ $z+\bar{z}-4 > 0$.

Ἀντικαθιστώντες τὰς τιμὰς τῶν z καί \bar{z} συναρτήσῃ τοῦ w ἐν τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν: $\frac{i(w+1)}{w-1} + \frac{-i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} - 4 > 0$ (3) Μετὰ τὰς πράξεις

ή τελευταία σχέση γράφεται:

$$\frac{-2iw + 2i\bar{w} - 4w\bar{w} + 4w + 4\bar{w} - 4}{|w-1|^2} > 0 \quad (4)$$

Θέτοντες στην (4) $w = u+iv$ και $\bar{w} = u-iv$ η άνωτέρω σχέση ισοδυναμεί με την κάτωθι:

$$-2iu + 2iv + 2iu + 2iv - 4u^2 - 4v^2 + 4u + 4iv + 4v - 4iv - 4 > 0 \quad (5)$$

$$4v - 4u^2 - 4v^2 + 8u - 4 > 0 \quad \text{ή} \quad u^2 - 2u + 1 + v^2 - v < 0 \quad \text{ή}$$

$$(u-1)^2 + (v-\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4} \quad (6)$$

Όθεν, τό άνωτέρω χωρίο (δηλ. ή λαρίδα $x > 2$) άπειμονίζεται διά του δοθέντος μετασχηματισμού στο έσωτερικό περιφέρειας κέντρου $K(1, \frac{1}{2})$ και ακτίνος $R = \frac{1}{2}$.

69/. Να εύρεθῇ πού άπειμονίζεται τό χωρίο $\Im m z \leq 0$ υπό του μετασχηματισμού $w = \frac{z+i}{z-1}$.

Λύση Έπειδή $\Im m z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ δά έχωμεν $\frac{z-\bar{z}}{2i} < 0 \quad (1)$

Έυ του $w = \frac{z+i}{z-1}$ λαμβάνομεν: $z = \frac{i(w+1)}{w-1} \quad (2)$ και $\bar{z} = \frac{-i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} \quad (3)$

Η (1) λόγω των (2) και (3) γίνεται:

$$\frac{1}{2i} \left[\frac{i(w+1)}{w-1} + \frac{i(\bar{w}+1)}{\bar{w}-1} \right] < 0 \quad \text{ή} \quad \frac{w+1}{w-1} + \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} < 0 \quad (4)$$

Έυ της (4) λαμβάνομεν $\frac{2|w|^2-2}{|w-1|^2} < 0 \quad \text{ή} \quad |w| < 1.$

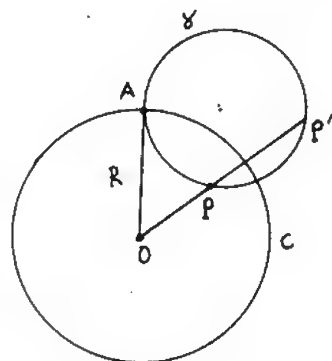
§ 5. ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ Ή ΚΑΤΟΠΤΡΙΣΜΟΥ

Όρισμός V-5-1. Δύο σημεία P και P' θά υαλοῦνται συμμετρία ή κατοπτρια ως προς δοθείσαν περιφέρεια C κέντρου O και ακτίνος R , εάν ταῦτα υεῖνται εἰς τήν αὐτήν αὐτίνα τήν διερχομένην διά του κέντρου O και επί πλῆον αἱ ἀποστάσεις των ἀπό τό O υαανοποιουῦν τήν σχέσηιν: $OP \cdot OP' = R^2$.

* Ἡδη παραδέτομεν ἕνα σπουδαῖον θεωρήμα πού ἀφορᾷ τά συμμετρία σημεία:

Θεώρημα V-5-1. Δύο σημεία P και P' είναι συμμετρία ως προς έναν κύκλο C , εάν και μόνον εάν, υάδε κύκλος (ή ευθεία γραμμή) γ διέρχεται από τα P και P' είναι ὀρθογώνιος προς τον C .

Ἀπόδειξις: Ἐστώσαν τὰ P και P' συμμετρία ως προς τον C και ἔστω γ ένας κύκλος διέρχόμενος από τὰ P και P' , ἔστω δὲ OA ἡ ἐφαπτομένη προς τον γ ἐκ τοῦ κέντρου O (βλ. Σκ. 1). Τότε, συμφώνως προς γνωστὸν θεώρημα τῆς Γεωμετρίας (Δύναμις σημείου ως προς κύκλον), δὲ ἔχουμεν: $OA^2 = OP \cdot OP'$. Ἐξ ἄλλου, λόγω τῆς συμμετρίας εἶναι $OP \cdot OP' = R^2$. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων σχέσεων ἔπεται $OA = R$. Τότε τὸ A δὲ καὶ εἶναι ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ C , καὶ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς περιφέρειας τῆς γ καὶ ὥς ἐκ τούτου δὲ καὶ εἶναι εἰς τὴν τομήν αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ αὐτὴ OA εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ γ ἔπεται, ὅτι οἱ κύκλοι C καὶ γ τέμνονται ὀρθογώνως.



Σκ. 1

Ἀντιστροφή: Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι υάδε κύκλος γ διέρχεται από τὰ P και P' τέμνει ὀρθογώνως τον C . Τότε ἡ ευθεία ἡ διέρχουσα διὰ τῶν P και P' ὀφείλει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου C , καὶ ὅτι ἡ ευθεία αὕτη θεωρουμένη ὡς περιφέρεια ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἔννοιαν δὲ εἶναι ὀρθογώνιος προς τον C καὶ ὥς ἐκ τούτου ὀφείλει νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ C . Ἐάν λοιπὸν φέρωμεν τὴν αὐτὴν OA , δὲ ἔχουμεν τότε $R^2 = OA^2 = OP \cdot OP'$. Ἀρα τὰ σημεία P και P' εἶναι συμμετρία ως προς τον C .

Θεώρημα V-5-2. Δίδονται τὰ σημεία Z_1 και Z_2 , τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρία ως προς ἕνα κύκλον C καὶ ἔστωσαν W_1, W_2 καὶ Γ αἱ εὐθύνες τῶν Z_1, Z_2 καὶ C ἀντιστοίχως, ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $W = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - c \cdot b \neq 0$. Τότε τὰ σημεία W_1 και W_2 εἶναι συμμετρία ως προς τον κύκλον Γ .

Ἀπόδειξις: Σύμφωνα προς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀρκεῖ νὰ δειξωμεν ὅτι υάδε κύκλος (ή ευθεία γραμμή) L διέρχεται από τὰ W_1, W_2 εἶναι

όρθογώνιος προς τον Γ . Έστω $z = S^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ ότι είναι ο αντίστροφος του μετασχηματισμού $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ και έστω γ ότι είναι η εὐκλινής L υπό του $z = S^{-1}(w)$. Τότε, γινωστόν, η εὐκλινής γ θα είναι ένας κύκλος ή μία ευθεία διερχομένη δια των z_1 και z_2 . Επειδή τα z_1 και z_2 είναι συμμετρίκως προς τον C , έξ υποθέσεως, έπεται συμφώνως προς τό προηγούμενον θεώρημα, ή γ είναι όρθογώνιος προς τον C . Όθεν αι εὐκλινές, των γ και C υπό του μετασχηματισμοῦ $w = S(z)$, δηλ. αι L και Γ θα είναι όρθογώνιοι μεταξύ των. (βλ. Σχετιωῶς Άσκησιν 13 ή Κεφάλαιον X, §1 Πόρισμα X-1-1). Άρα τά σημεία w_1 και w_2 είναι συμμετρίκως προς τον κύκλον Γ .

• Εφαρμογαί! Έστω ότι τό D παριστᾷ τό (άνω) ήμισυπίπεδον $\Im m z > 0$ και έστω z_0 ότι είναι ένα σημείον του D . Νά εύρεθῇ ό γραμμιῶς μετασχηματισμός $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (1), $ad-bc \neq 0$, ό όποιος άπειυονίσει τό D εἰς τον δίσκον $|w| < 1$ και επί πλέον ικανοποιεῖ τάς συνθήκας $S(z_0) = 0$ και $S'(z_0) > 0$ (2).

Λύσις: Λόγω τῆς πρώτης των (2) έχομεν: $-az_0 = b$. Έξ άλλου, εάν \bar{z}_0 εἵναι τό συμμετρίκον του z_0 ως προς τον πραγματικόν άξονα οκ, τότε, συμφώνως προς τό θεώρημα X-5-2, τά σημεία ταῦτα άπειυονίζονται υπό του $w = S(z)$ εἰς τά συμμετρίκὰ των ως προς τον κύκλον $|w| = 1$. Επειδή $S(z_0) = 0$, θα πρέπει τό $S(\bar{z}_0) = \infty$ και διά νά συμβαίνη τό τελευταίον άρκει $c\bar{z}_0 + d = 0$, δι τῆς όποιας λαμβάνομεν $-c\bar{z}_0 = d$. Ό (1) λοιπόν γράφεται:

$$w = S(z) = \frac{az - a\bar{z}_0}{cz - c\bar{z}_0} = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_0} \quad (3)$$

Κατά τον μετασχηματισμόν $w = S(z)$ τό σύνορον του χωρίου $\Im m z > 0$ άπειυονίζεται εἰς την περιφέρεια $|w| = 1$ και ως έυ τούτου τό σημείον $z = 0$ του συνόρου θα άπειυονίζεται εἰς κάποιο σημείον τῆς περιφερείας $|w| = 1$. Έυ τῆς (3) διά $z = 0$ λαμβάνομεν:

$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_0}$ ή $|w| = \left| \frac{a}{c} \right| \cdot \left| \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_0} \right|$ ή $1 = \left| \frac{a}{c} \right| \cdot 1$. Έυ τῆς τελευταίας ισότητος λαμβάνομεν: $\frac{a}{c} = e^{i\theta}$

Όθεν, ή (3) γράφεται:

$$w = S(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_0} \quad (4),$$

όπου θ είναι παράμετρος που πρέπει να προσδιορισθῇ.

Λόγω τῆς δευτέρας συνθήκης τῶν (2) ἔχομεν:

$$S'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{z_0 - \bar{z}_0} = \frac{e^{i\theta}}{2i \operatorname{Im} z_0} > 0 \quad (5).$$

Ἐπειδὴ $\operatorname{Im} z_0 > 0$, ἵνα ἰσχύῃ ἡ (5), ἀρκεῖ $e^{i\theta} = i$, ὅτε ἡ (4) γράφεται:

$$W = i \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (6)$$

29. Ἐστω K ὅτι εἶναι ὁ μοναδιαῖος δίσκος $|z| < 1$ καὶ ἔστω z_0 εἶναι ἓνα σημεῖον τοῦ K . Νὰ εὑρεθῇ ἓνας γραμμικός μετασχηματισμός $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (1), $ad - cb \neq 0$, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τὸν K ἐντὸς τοῦ μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$ καὶ ἐπὶ πλέον ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας: $S(z_0) = 0$ καὶ $S'(z_0) > 0$. (2).

Λύσις: Ἐὰν $z_0 = 0$, τότε ὁ ζητούμενος μετασχηματισμός εἶναι προφανῶς ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός $w = z$ (τετριμμένη περίπτωση). Ἐστω ἥδη $0 < |z_0| < 1$. Λόγω τῆς πρώτης τῶν (2) ἔχομεν $-az_0 = b$. Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν τοῦ z_0 ὡς πρὸς τὸν κύκλον K εἶναι τὸ $\frac{1}{\bar{z}_0}$, διότι: $|z_0| \cdot \left| \frac{1}{\bar{z}_0} \right| = 1 = 1^2$.

Τὰ σημεία z_0 καὶ $\frac{1}{\bar{z}_0}$ ἀπεικονίζονται μέσω τοῦ $w = S(z)$ λόγω τοῦ θεωρήματος V-5-2, εἰς συμμετρικὰ σημεία τοῦ κύκλου $|w| = 1$.

Ἐπειδὴ $S(z_0) = 0$ δὰ πρέπει τὸ $S\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \infty$ καὶ ἵνα συμβαίῃ τὸ τελευταῖον, ἀρκεῖ τὸ $c \cdot \frac{1}{\bar{z}_0} + d = 0$ ἢ $-d \cdot \bar{z}_0 = c$. Ὁ (1) λοιπὸν γράφεται:

$$W = S(z) = \frac{az - az_0}{-d\bar{z}_0 z + d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ σύνορον τοῦ $|z| = 1$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ σύνορον τοῦ $|w| = 1$, ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον $z = 1$ ἀπεικονίζεται εἰς ὑπόλοιον σημεῖον τοῦ $|w| = 1$.

Ἐν τῆς (3) διὰ $z = 1$ λαμβάνομεν:

$$W = \frac{a}{d} \cdot \frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0} \quad \text{καὶ} \quad |W| = \left| \frac{a}{d} \right| \cdot \frac{|1 - z_0|}{|1 - \bar{z}_0|} \quad \text{ἢ}$$

$$1 = \left| \frac{a}{d} \right| \cdot 1. \quad \text{Ὅθεν,} \quad \frac{a}{d} = e^{i\theta}. \quad \text{Ἡ (3) λοιπὸν γράφεται:}$$

$$w = S(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (4)$$

ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν σταθεράν $e^{i\theta}$, θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν συνθήκην $S'(z_0) > 0$ καὶ ἡ ὁποία εἰς τὴν προειμένην περίπτωσηιν, λόγῳ τῆς (4), γράφεται: $S'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{1-|z_0|^2} > 0$ (5). Ἐπειδὴ $0 < |z_0| < 1$, ἵνα ἰσχύῃ ἡ (5), ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν: $e^{i\theta} = 1$.

Ὅθεν, ὁ δητούμενος μετασχηματισμός λόγῳ τοῦ (4), θὰ εἶναι:

$$W = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

- Νὰ εὑρεθῇ ὁ γραμμικός υλασματινός μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίσει τὰ σημεῖα $z_1=2$, $z_2=i$, $z_3=-2$ εἰς τὰ σημεῖα $w_1=1$, $w_2=i$, $w_3=-1$.
(Ἀπάντ: $W = (3z+2i):(iz+6)$).
- Νὰ εὑρεθῇ ὁ γραμμικός υλασματινός μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1=0$, $z_2=-i$, $z_3=-1$ εἰς τὰ σημεῖα $w_1=i$, $w_2=1$, $w_3=0$.
(Ἀπάντ: $W = -i \cdot \left(\frac{z+i}{z-1}\right)$).
- Νὰ εὑρεθῇ ὁ γραμμικός υλασματινός μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα $z_1=\infty$, $z_2=i$, $z_3=0$ εἰς τὰ σημεῖα $w_1=0$, $w_2=i$, $w_3=\infty$.
- Δείξατε, ὅτι ἡ σύνθεσις δύο γραμμικῶν υλασματινῶν μετασχηματισμῶν εἶναι ἐπίσης ἓνας γραμμικός υλασματινός μετασχηματισμός.
- Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σταθερά σημεῖα τῶν μετασχηματισμῶν:
i) $W = \frac{2z-5}{z+4}$ ii) $W = \frac{6z-9}{z}$
- Νὰ εὑρεθοῦν αἱ εἰσόνες διὰ τοῦ γραμμικοῦ υλασματινοῦ μετασχηματισμοῦ $W = \frac{z+i}{z-i}$ τῶν κατωτέρω γραμμῶν:
i) $|z-1|=1$ ii) $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{4}$ iii) $|z-i|=2$ iv) $\tilde{G}(0,1)$ v) $\tilde{G}(0,1-i)$ vi) $\tilde{G}(-1,1+i)$.

7. Νά εύρεθῇ ὁ διγραμμιῶς μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίσει τὰ σημεῖα $i, -i, 1$ τοῦ z -ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα $0, 1, \infty$ τοῦ w -ἐπιπέδου.

8. Ἐάν $a \neq b$ εἶναι δύο σταθερά σημεῖα τοῦ διγραμμιῶς μετασχηματισμοῦ, δείξατε ὅτι οὗτος δύναται νά γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{w-a}{w-b} = k \left(\frac{z-a}{z-b} \right), \text{ ὅπου } k: \text{σταθερά.}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $a=b$, τότε δείξατε ὅτι οὗτος γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{1}{w-a} = \frac{1}{z-a} + k, \text{ ὅπου } k \text{ σταθερά.}$$

9. Δείξατε, ὅτι ὁ πλέον γενιῶς γραμμιῶς μετασχηματισμός, ὅστις ἀπεικονίσει τὴν περιφέρεια $|z|=1$ εἰς τὴν περιφέρεια $|w|=1$, εἶναι ὁ κατωθί:

$$w = e^{i\theta} \left(\frac{z-p}{\bar{p}z-1} \right), \text{ ὅπου } p \text{ σταθερά.}$$

10. Δείξατε, ὅτι ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = \frac{z-1}{iz-1}$, τὸ χωρίον $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ χωρίον $|w| \leq 1$.

11. Νά εύρεθοῦν αἱ εἰσόνες διὰ τοῦ γραμμιῶς μετασχηματισμοῦ $w = \frac{z+i}{z-i}$ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ὁρίζονται διὰ τῶν σχέσεων:

- i) $\operatorname{Re} z > 0$ ii) $\operatorname{Im} z < 0$ iii) $|z-i| > 1$ καὶ $\operatorname{Im} z > 0$ iv) $|z-1| > 1$ καὶ $\operatorname{Re} z > 0$
v) $|z-1| > 1$ καὶ $\operatorname{Re} z > 0$. vi) Τῆς γωνίας $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ vii) Τῆς ἀκτίδος $0 < \rho < 1$.

12. Νά εύρεθοῦν τὰ σταθερά σημεῖα τοῦ ἀντι-Möbius μετασχηματισμοῦ $w = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

13. Δείξατε ὅτι, ὁ μετασχηματισμός $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ διατηρεῖ τὰ μέτρα καὶ τὴν φοράν τῶν γωνιῶν μεταξὺ δύο ῥαίων καμπύλων διερχομένων δι' ἑνὸς δεδομένου σημείου.

14. Έστω K είναι ένας δίσκος και έστω z_0 ένα σημείον του K . Νά εύρε-
 θή ένας γραμμικός υλισματιγός μετασχηματισμός $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$,
 όστις άπειμονίσει τον K έντός του μοναδιαίου δίσκου $|w| < 1$ και επί πλέον
 ίκανοποιεί τάς συνθήκας :

$$S(z_0) = 0 \text{ και } S'(z_0) > 0.$$

15. Η συνάρτησις $w = e^{i\theta} \cdot \frac{z-b}{z-\bar{b}}$ ($b = a + i\beta$, $\beta > 0$) άπειμονίσει τό άνω ήμισυπέδο έ-
 πί του μοναδιαίου κύκλου· εύρετε: 1) $\arg w(x) = \theta(x)$, 2) $w'(b)$, 3) ποιον μέ-
 ρος του άνω ήμισυπέδου « συστελλεται » διά της άνωτέρω άπειμονίσεως
 και ποιον « διαστελλεται ».

16. Διά την συνάρτησιν $w = e^{ia} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ($|a| < 1$) ή όποία άπειμονίσει τό μοναδιαϊο
 κύκλο επί του έαυτου του, εύρετε: 1) $\arg w(e^{i\varphi}) = \theta(\varphi)$, 2) $w'(0)$ και $w'(a)$
 3) ποιον μέρος του μοναδιαίου κύκλου « συστελλεται » και ποιον « διαστελ-
 λεται » διά της έν λόγω άπειμονίσεως 4) $\max \left| \frac{dw}{dz} \right|$ και $\min \left| \frac{dw}{dz} \right|$ διά $|z| \leq 1$.

17. Άπειμονίσατε τον κύκλο $|z| < L$ επί του κύκλου $|w| < 1$ ούτως, ώστε :

$$1) w(\frac{1}{2}) = 0, \arg w'(\frac{1}{2}) = 0, \quad 2) w(\frac{i}{2}) = 0, \arg w'(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

$$3) w(0) = 0, \arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad 4) w(a) = a, \arg w'(a) = \lambda.$$

18. Νά εύρεθούν αί εύθείαι γραμμαί αί όποίαι παραμένουν άμετάβλητοι υπό
 του μετασχηματισμού $2wz + i(w+z) - 2 = 0$

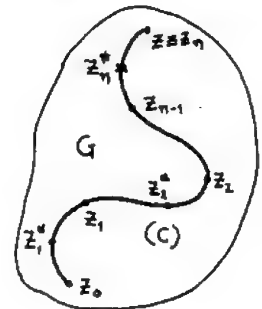
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

§1. ΒΑΣΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ

Θεωροῦμεν μίαν αμψύλην (C) εἰς τὸ z -ἐπίπεδον μὲ παραμετρίωσιν ἐξίσωσιν $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Θὰ πλέξωμεν ὅτι ἡ αμψύλην (C) εἶναι λεία, ἐάν ὑπάρχη τὴ παράγωγος $z'(t)$ διὰ $a \leq t \leq b$, εἶναι συνεχῆς καὶ ἐπὶ πλέον $z'(t) \neq 0$ διὰ καθεστὲ $t \in [a, b]$.

Ἄς θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν $f(z)$ τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς ὠρισμένη εἰς ἓνα πεδίου G τοῦ z -ἐπίπεδου καὶ τὴν λείαν αμψύλην (C) ἐντὸς τοῦ G μὲ ἀρχικὸν σημεῖον τὸ z_0 καὶ τελικὸν σημεῖον τὸ z (βλ. Σχ.1). Κατὰ μῆκος τῆς αμψύλης (C) ἐυλόγομεν τὰ σημεῖα $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n \equiv z$ μὲ ἄλλους λόγους ἐυτελοῦμεν μίαν διαμέρισιν τοῦ τόξου $\overline{z_0 z}$. Τὰ ἀνωτέρω σημεῖα τὰ λαμβάνομεν κατὰ τὴν θετικὴν φοράν διαγραφῆς τῆς αμψύλης (C) καὶ ὡς τοιούτην θεωροῦμεν τὴν διεύθυνσιν διαγραφῆς τῆς (C) ὅταν τὸ t αὐξάνη.



Σχ. 1

Ἦδη ἄς σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα:

$$\sum_{p=1}^n f(z_p^*) \cdot \Delta z_p \quad (1)$$

ὅπου $\Delta z_p = z_p - z_{p-1}$ καὶ z_p^* εἶναι ἓνα τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου $\overline{z_{p-1} z_p}$ τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος ἄς καλέσωμεν $\Delta \ell_p$.

Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι, τὸ πλάτος ὅριον:

$$\lim_{\substack{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n}} \sum_{p=1}^n f(z_p^*) \cdot \Delta z_p, \quad \text{ὅτε καὶ } n \rightarrow \infty,$$

ὑπάρχει ἀνεξαρτήτως τῆς ἐυλογῆς τῶν σημείων z_p^* καὶ z_p , τότε ἡ $f(z)$ καλεῖται ὁλοκληρώσιμος κατὰ μῆκος τῆς αμψύλης (C) καὶ τὸ ὅριον τοῦτο συμβολίζεται οὕτω:

$$\int_C f(z) dz$$

υαί τό όποϊόν (όρίον) υαλθίται όλοκλήρωμα τής $f(z)$ υατά μήκος τής καμπύλης (C).

“Όστε έξ όρισμοϋ:

$$\int_C f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n}} \sum_{p=1}^n f(z_p^*) \cdot \Delta z_p \quad (2).$$

• “Ας υαλέσωμεν:

$z_p = x_p + i y_p$, $z_p^* = x_p^* + i y_p^*$, ότε $\Delta z_p = \Delta x_p + i \Delta y_p$, $p=0, 1, \dots, n$.

Καί έστω ότι: $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, τότε τό άθροισμα (1) δύναται νά λάβη τήν υατώδι μορφήν:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n f(z_p^*) \cdot \Delta z_p &= \sum_{p=1}^n \left\{ u(x_p^*, y_p^*) + i \cdot v(x_p^*, y_p^*) \right\} \cdot \left\{ \Delta x_p + i \Delta y_p \right\} \quad \eta \\ \sum_{p=1}^n f(z_p^*) \Delta z_p &= \sum_{p=1}^n \left\{ u(x_p^*, y_p^*) \Delta x_p - v(x_p^*, y_p^*) \Delta y_p \right\} + \\ &+ i \cdot \sum_{p=1}^n \left\{ u(x_p^*, y_p^*) \Delta y_p + v(x_p^*, y_p^*) \Delta x_p \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

Πρότασις VI-1-1. Έάν ή $f(z)$ είναι συνεχής επί τοϋ πεδίου G, τό όποϊόν περιέχει τήν λείαν υαμπύλην (C), τότε ή $f(z)$ είναι όλουθηρώσιμος υατά μήκος τής (C).

Απόδειξις: Η συνέχεια τής $f(z)$ υατά μήκος τής λείας υαμπύλης (C) συνεπάγεται, ώς γνωστόν, τήν συνέχειαν τών συναρτήσεων $u(x, y)$ υαί $v(x, y)$. Έάν λοιπόν έυλέξωμεν υατά μήκος τής άνωτέρω υαμπύλης τήν διαμέρισιν μέ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0$, $n \uparrow \infty$, τοϋτο θα συνεπάγεται ότι $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta x_p \rightarrow 0$ υαί $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta y_p \rightarrow 0$ ότε $n \uparrow \infty$.

Παρατηροϋμεν ότι, τό πραγματιϋόν υαί τό φανταστιϋόν μέρος τοϋ άθροίσματος (3) είναι τά όλουθηρωατιϋά άθροίσματα τών επιυαμπυλίων όλουθηρωμάτων 8^{ου} είδους, ήτοι τών όλουθηρωμάτων:

$$\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy \quad \text{υαί} \quad \int_C u(x, y) dy + v(x, y) dx$$

τά όποια ύπάρχουν λόγω τής συνεχείας τών $u(x, y)$ υαί $v(x, y)$ υατά μήκος τής (C). “Όθεν έυ τής (3), μετά τήν λήψιν τών όρίων, λαμβάνομεν:

$$\int f(z) dz = \int u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int u(x, y) dy + v(x, y) dx \quad (4)$$

τό όποϊόν άποδεικνύει ότι ή $f(z)$ είναι όλουληρώσιμος.

Παρατήρηση: 'Η σχέση (4) τήν όποϊαν συντόμως γράφομεν ούτω:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx \quad (5)$$

δύνανται νά χρησιμοποιηθώ ώς όρισμός του όλουληρώματος τής $f(z)$ κατά μήκος τής αμπτυλης (C)

Ιδιότητες του μιγαδιου όλουληρώματος.

'Εν τών άνωτέρω έπεται ένας άριθμός ιδιοτήτων του μιγαδιου όλουληρώματος, αϊ όποϊαι είναι προφανείς συνέπειαι τών ιδιοτήτων του έπιαμπτυλιου όλουληρώματος ήτοι:

$$1^{\circ}/ \quad \int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz$$

$$2^{\circ}/ \quad \int_{AB} f(z) dz + \int_{BF} f(z) dz = \int_{AF} f(z) dz$$

$$3^{\circ}/ \quad \int_{\gamma} a \cdot f(z) dz = a \cdot \int_{\gamma} f(z) dz, \quad a \in \mathbb{C}.$$

$$4^{\circ}/ \quad \int_{\gamma} \{f_1(z) + f_2(z)\} dz = \int_{\gamma} f_1(z) dz + \int_{\gamma} f_2(z) dz$$

$$5^{\circ}/ \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| d\ell, \quad \text{όπου } d\ell \text{ είναι τό διαφοριόν του μή-}$$

ους του τόξου τής αμπτυλης (C) και τό όλουλήρωμα του δεξιου μέλους είναι ένα έπιαμπτυλιου όλουλήρωμα πρώτου είδους κατά μήκος τής αμπτυλης (C). (Θεώρημα του Darboux).

Απόδ: 'Εφαρμοδόντες τήν τριγωνικήν ιδιότητα έχομεν:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \lim_{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n f(z_p^*) \cdot \Delta z_p \right| \leq \lim_{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n |f(z_p^*)| \cdot |\Delta \ell_p| = \int_{\gamma} |f(z)| d\ell.$$

6^ο/'Εάν $\max_{z \in C} |f(z)| = M$ και ℓ είναι τό μήκος τής αμπτυλης (C), τότε δά είναι:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell$$

82/ Ίσχύει και ο αόλοθος τύπος αλλαγής των μεταβλητών:

$$\int_C f(z) dz = \int_\Gamma f[\varphi(\eta)] \varphi'(\eta) d\eta$$

όπου η $z = \varphi(\eta)$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής η και η οποία δημιουργεί μίαν άμφιμονοσήμαντον αντιστοίχισιν μεταξύ των υπύλων (c) και Γ .

83/ Εάν $z = z(t)$ είναι η παραμετρική είσωσις της αμπύλης (c) και $z(a)$ και $z(b)$ είναι τα άκρα αυτής, τότε θα έχουμε:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

• Παράδειγμα: Έστω (c) είναι μία λεία αμπύλη ενώνουσα τα σημεία z_0 και z .
 Η υπολογισθή το ολοκλήρωμα: $\int_C z^n dz$.

Λύσις: i). Έστω ότι $n \neq 0, -1$ και ότι η (c) έχει την παραμετρική είσωσιν $z = z(t)$ με $z_0 = z(a)$ και $z = z(b)$, τότε συμφώνως προς την 82^η ιδιότητα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_C z^n dz &= \int_a^b z^n(t) \cdot z'(t) dt = \frac{1}{n+1} \cdot \int_a^b \frac{d}{dt} z^{n+1}(t) dt \\ &= \frac{1}{n+1} z^{n+1}(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{n+1} [z^{n+1}(b) - z^{n+1}(a)] = \frac{1}{n+1} (z^{n+1} - z_0^{n+1}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμεν ότι αυτό το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητον από την παραμετρική είσωσιν της αμπύλης (C) η οποία ενώνει τα σημεία z_0 και z .

ii) Είς την περίπτωσιν υστά την οποίαν η (c) είναι μία κλειστή αμπύλη, τότε $z_0 = z$ και λόγω του ανωτέρου αποτελέσματος θα έχουμε: $\int_C z^n dz = 0$.

Εάν $n=0$, τότε $\int_C dz = \lim_{\substack{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n}} \sum_{p=1}^n \Delta z_p = \lim_{\substack{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n}} \sum_{p=1}^n (z_p - z_{p-1}) = z_n - z_0 = z - z_0$.

iii) Εάν $n=-1$, τότε εργαζόμεθα ως αόλοθως:

Επειδή $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, διά υάδε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, θα έχουμε:

$$I = \int_C \frac{dz}{z} = \int_C \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2} = \int_C \frac{x dx + y dy}{x^2+y^2} + i \int_C \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$$

Διά τον υπολογισμό των δύο τελευταίων ολοκληρωμάτων θέτουμε $z = \rho \cdot e^{i\theta}$. Γνωστός οντος ότι $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d \text{ το } \epsilon \phi \frac{y}{x} = d\theta$ (βλ. Τόμος Β' σελ. 535) θα έχουμε:

$$I = \int_C \frac{\rho d\rho}{\rho^2} + i \int_C d\theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} + i \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \log \frac{\rho}{\rho_0} + i(\theta - \theta_0) \quad (1),$$

όπου ρ_0, ρ είναι τα μέτρα των z_0, z και θ_0, θ είναι τα όρίσματα των z_0, z αντίστοιχως.

Παρατηρούμεν ότι:

$$I = \log \rho + i\theta - (\log \rho_0 + i\theta_0) = \log z - \log z_0.$$

Σημειωτέον ότι, $\theta - \theta_0$ παριστά την μεταβολήν του όρίσματος του σημείου z , όταν αυτό τό σημείον διαγράφη την αμψύλην Γ από τό σημείον z_0 μέχρι του z .

iv). Τέλος ἄς υπολογίσωμεν τό ολολήρωμα $I = \int_C \frac{dz}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, όπου C είναι μία περιφέρεια μέ κέντρον τήν ἀρχήν των αξόνων και ἀκτίνα ρ .

Ἡ γωνία θ εἰς τήν προειμένην περίπτωσιν μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως 2π . Συνεπῶς $\theta - \theta_0 = 2\pi - 0 = 2\pi$. Εἶναι δέ καί $\log \frac{\rho}{\rho_0} = \log 1 = 0$. Ὅθεν, ὁ τύπος (1) εἰς τήν προειμένην περίπτωσιν δίδει:

$$I = \int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

• 2^{ος}. Νά υπολογισθῇ τό ολολήρωμα $\int_C \bar{z} dz$ ἀπό τό σημείον $z=0$ μέχρι τό σημείον $z=4+2i$ κατά μήκος τῆς αμψύλης C ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $z=t^3+it$.

Λύσις: Τά σημεία $z=0$ καί $z=4+2i$ ἀντιστοιχοῦν εἰς τας τιμάς $t=0$ καί $t=2$ τῆς παραμέτρου t . Ὅθεν ἔχομεν:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^2 \overline{(t^3+it)} d(t^3+it) = \int_0^2 (t^3-it)(2t+it) dt = \int_0^2 (2t^3 - it^3 + t) dt = 10 - \frac{8i}{3}.$$

3^{ος} τρόπος: Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς αμψύλης C εἶναι: $x=t^3$, $y=t$, τό δέ ολολήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} dz &= \int_C (x-iy)(dx+idy) = \int_C x dx + y dy + i \int_C x dy - y dx \\ &= \int_0^2 t^3 dt^3 + t dt + i \int_0^2 t^3 dt - t dt^2 = \int_0^2 (2t^3 + t) dt + i \int_0^2 (-t^3) dt = 10 - \frac{8i}{3}. \end{aligned}$$

§ 2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ CAUCHY-GOURSAT ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ο A. Cauchy τὸ ἔτος 1814 ἔυαυνε τολήμηρὰν χρῆσιν τοῦ μιγαδιουῦ ἐπιπέδου θεωρήσας τὰ μιγαδιὰ ὁλοκληρώματα. Ἀπέδειξε ὅτι: "Ἐὰν ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως G εἶναι ἀπλῶς συνευτιμός καὶ ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐν G καὶ ἡ $f'(z)$ εἶναι συνεχὴς ἐν G , τότε τὸ ὁλοκληρώμα τῆς $f(z)$ κατὰ μήκος καθε καὶ στῆς καμπύλης ἐν G εἶναι μηδέν".

Βραδύτερον ὁ E. Goursat τὸ 1900 ἀπέδειξε τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μετὰ τὴν ἀσθενεστέραν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ $f'(z)$ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχη καὶ νὰ εἶναι πεπερασμένη ἐν G , δι' ὃ καὶ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα φέρει τὴν ὀνομασίαν Θεώρημα τῶν Cauchy - Goursat.

"Εὐτοτε πολλοὶ μαθηματικοὶ ἔδωσαν ἀπλᾶς καὶ συντόμους ἀποδείξεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Τὸ θεώρημα τῶν Cauchy - Goursat εἶναι σημαντικὸν διὰ τὴν θεωρίαν τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καὶ δίδει πλείστας, λίαν ἐνδιαφερούσας, ιδιότητες τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καθὼς καὶ ἐφαρμογὰς αὐτῶν εἰς τὸν ὑπολογισμόν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων διὰ τῆς μεθόδου τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων (Residuum).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τῶν Cauchy - Goursat εἶναι ἀναγκαῖον νὰ προηγηθῇ τὸ κατωθί λήμμα.

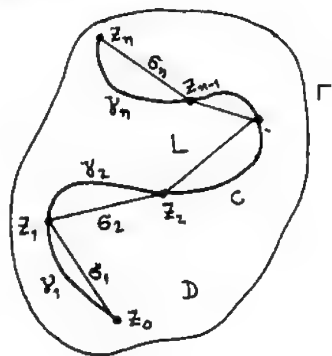
Λήμμα VI-2-1 "Ἐστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς ἓνα πεδίου G , τὸ ὁποῖον περιέχει μίαν τμηματικῶς λίαν καμπύλην C . Τότε διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία πολυγωνικὴ γραμμὴ L ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν C καὶ περιεχομένη ἐντὸς τοῦ G τοιαύτη, ὥστε:

$$\left| \int_C f(z) dz - \int_L f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Ἀπόδειξις: Ἐστω D ἓνα φραγμένον χωρίον περιελθὼν τὴν καμπύλην C τοιοῦτον, ὥστε ἡ θήκη αὐτοῦ \bar{D} νὰ περιέχεται ἐντὸς τοῦ πεδίου G . Ἄς καλέσωμεν Γ τὸ σύνορον τοῦ D καὶ ἔστω P ἡ ἀπόστασις τῶν καμπύλων C καὶ Γ . Ἐστω δὲ ρ τὸ μήκος τῆς C . Ἐφ' ὅσον ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ \bar{D} καὶ εἶναι καὶ ὁμοίως συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ, ἦτοι: Διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμὸς $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{2\ell} \quad \text{διὰ τὰδε } z', z'' \in \bar{D} \text{ μὲ } |z' - z''| < \delta.$$

Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν τῆς αμπτυλῆς C ἔστω τὴν $\mathcal{D} = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα λαμβάνομεν ὑστὰ τὴν δεξιὴν φοράν διαγραφῆς αὐτῆς. Διὰ τῆς διαμερίσεως ταύτης ἡ C χωρίζεται εἰς n τό πληθὺς τόξα, τὰ ὁποῖα ἄς καλέσωμεν $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (βλ. Σχ.1). Τὴν ἀνωτέρω διαμέρισιν λαμβάνομεν εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μῆκος ἐνόςτου τῶν ἀνωτέρω τόξων νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\eta = \min(\delta, \rho)$.

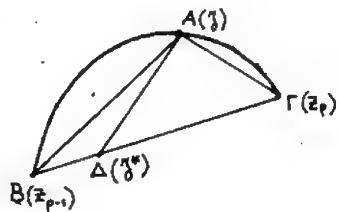


Σχ.1

Ἐστω L ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν αμπτυλῆν C μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$ καὶ τῆς ὁποίας τὰ μῆκη τῶν πλευρῶν ἄς τὰ καλέσωμεν $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ($\sigma_p = z_p - z_{p-1}$) (Εἰς τὸ σχῆμα δὲν δεῖνύεται τὸ χωρίον D).

Ἦδη ὁ ἀποδείξαμεν ὅτι πάντα τὰ σημεῖα τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς L εἰνται ἐντὸς τοῦ χωρίου \bar{D} .

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ τυχόν τόξον $\overline{z_{p-1} z_p} = \widehat{B\Gamma}$ (βλ. Σχ.2) καὶ ἔστω $A(\zeta)$ ἓνα τυχόν σημεῖον αὐτοῦ καὶ $\Delta(\zeta^*)$ ἓνα τυχόν σημεῖον τῆς χορδῆς $\overline{z_{p-1} z_p} \equiv B\Gamma$. Προφανῶς ἰσχύει $|\overline{BA}| + |\overline{A\Gamma}| < \text{μῆκος } \widehat{B\Gamma} < \eta$ καὶ $|\overline{B\Gamma}| < \eta$.



Σχ.2

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς γεωμετρίας ὅτι:

$$|\overline{A\Delta}| < \frac{|\overline{BA}| + |\overline{A\Gamma}| + |\overline{B\Gamma}|}{2} < \frac{n + \eta}{2} = \eta$$

Ὅθεν, πάντα τὰ σημεῖα τῆς L εἰνται ἐντὸς τοῦ \bar{D} .

Ἄς σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα:

$$S_n = \sum_{p=1}^n f(z_p) \cdot \Delta z_p \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $\Delta z_p = \int_{\gamma_p} dz$ καὶ ὁ $f(z_p)$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς, τὸ ἄθροισμα (1)

γράφεται οὕτω:

$$S_n = \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p} f(z_p) dz \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου,
$$\int_C f(z) dz = \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p} f(z) dz \quad (3)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$\int_C f(z) dz - S_n = \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p} [f(z) - f(z_p)] dz \quad (4) \quad \eta$$

$$\left| \int_C f(z) dz - S_n \right| \leq \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p} |f(z) - f(z_p)| d\ell_p \quad (5)$$

Εἶναι ὅμως, $|f(z) - f(z_p)| < \frac{\epsilon}{2\ell}$, διότι $|z - z_p| < \delta$, συνεπῶς ἡ (5) γίνεται :

$$\left| \int_C f(z) dz - S_n \right| \leq \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p} \frac{\epsilon}{2\ell} d\ell_p = \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \sum_{p=1}^n \int_{\gamma_p} d\ell_p = \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \sum_{p=1}^n \ell_p = \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \ell = \frac{\epsilon}{2}.$$

Ἐδείχθη ὅτι,
$$\left| \int_C f(z) dz - S_n \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (6)$$

Ἀντιμαθιστῶντες τὴν καμπύλην C ὑπὸ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς L καὶ τὰ τόξα γ_p ὑπὸ τῶν χορδῶν σ_p , λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὅσιν ὅτι $\Delta z_p = \int_{\sigma_p} dz$, τὸ ἄθροισμα (1) γράφεται :

$$S_n = \sum_{p=1}^n \int_{\sigma_p} f(z_p) dz \quad (7)$$

Ἐξ ἄλλου,
$$\int_L f(z) dz = \sum_{p=1}^n \int_{\sigma_p} f(z) dz \quad (8)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (7) καὶ (8) καὶ λαμβάνοντες ἐν συνεχείᾳ τὰς ἀπολύτους τιμὰς ἔχομεν :

$$\left| \int_L f(z) dz - S_n \right| \leq \sum_{p=1}^n \int_{\sigma_p} |f(z) - f(z_p)| d\ell_p \quad (9)$$

Εἶναι ὅμως, $|f(z) - f(z_p)| < \frac{\epsilon}{2\ell}$ ἐπὶ ἐνῆστον τμήματος σ_p τοῦ ὁποῖου τὸ μήκος ἔστω λ_p .

Ὅθεν, ἐν τῇ (9) λαμβάνομεν :

$$\left| \int_L f(z) dz - S_n \right| \leq \sum_{p=1}^n \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \int_{\sigma_p} d\lambda_p = \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \sum_{p=1}^n \lambda_p < \frac{\epsilon}{2\ell} \cdot \ell = \frac{\epsilon}{2} \quad (10)$$

Συνδυάζοντας τās (6) καί (10) λαμβάνομεν:

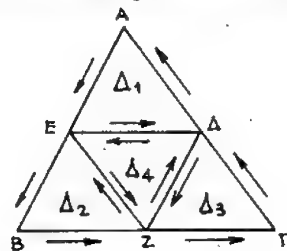
$$\left| \int_{\zeta} f(z) dz - \int_{\zeta} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\zeta} f(z) dz - S_n \right| + \left| S_n - \int_{\zeta} f(z) dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{ὁ. ἔ. δ.}$$

Θεώρημα VI-2-1. (Cauchy-Goursat). Ἐστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἓνα ἀπλῶς συνευκρινὸν χωρίον G , τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\zeta} f(z) dz = 0$$

διὰ τὰδε τμηματικῶς λείαν καὶ υλειτουργικὰ ἀπύλη C υειμένην ἐντὸς τοῦ G .

Ἀπόδειξις: Ἀν (περίπτωσις τοῦ τριγώνου) θ' ἀποδείξωμεν κατ' ἀρχάς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ C εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου ἔστω τοῦ $AB\Gamma$, (βλ. Σχ.1) καὶ τὴν ὁποῖαν θά συμβολίζωμεν συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου Δ . Ἐνύνομεν τὰ μέσα ΔE καὶ Z τῶν πλευρῶν $A\Gamma$, AE καὶ $B\Gamma$ αὐτοῦ τοῦ τριγώνου διὰ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΔE , EZ καὶ ZA καὶ σὺτ' ἔσχηματίσθησαν τέσσαρα τρίγωνα τὰ ὁποῖα θά τὰ συμβολίζωμεν συντόμως μὲ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ καὶ Δ_4 .



Σχ. 1.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ ἄς δεχθῶμεν ὅτι: $\int_{\Delta} f(z) dz \neq 0$.

Παραλείποντες, χάριν συντομίας, τὴν ὁλοκληρωτέαν συνάρτησιν εἰς τὰς ἰσότητας πού ἐπαυολογούσιν εἰς τὸ δεῦτερον μέλος, θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \int_{AB\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Delta AE} + \int_{\Delta EZ} + \int_{\Delta ZA} = \left\{ \int_{\Delta AE} + \int_{\Delta EZ} \right\} + \left\{ \int_{\Delta EZ} + \int_{\Delta ZA} \right\} + \left\{ \int_{\Delta ZA} + \int_{\Delta AE} \right\} \\ &= \int_{\Delta AE\Delta} + \int_{\Delta EZ\Delta} + \int_{\Delta ZA\Delta} = \int_{\Delta_1} f(z) dz + \int_{\Delta_2} f(z) dz + \int_{\Delta_3} f(z) dz + \int_{\Delta_4} f(z) dz. \end{aligned}$$

$$\text{Ὅθεν, } \left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_4} f(z) dz \right| \quad (1)$$

Ἐν παραστήσωμεν μὲ $\Delta^{(1)}$ τὸ τρίγωνον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν ὅρον τοῦ β^{ου} μέλους

πού λαμβάνει την μέγιστη τιμήν (εάν υπάρχουν δύο ή και περισσότεροι που έχουν την ίδια τιμήν, τότε λαμβάνομεν τόν έναν εξ αυτών) τότε, δά έχωμεν λόγω τῆς (1):

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \quad (1)$$

Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $\Delta^{(1)}$ ἐπιτυχάνοντες οὕτω ἕνα ἀνάλογον τρίγωνον $\Delta^{(2)}$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right| \quad \text{ἢ λόγω τῆς (2)}$$

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z) dz \right| \quad (3)$$

Συνεχίζοντες κατ' αὐτόν τόν τρόπον εὐρίσκουμεν ἕνα τρίγωνον $\Delta^{(n)}$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \quad (5)$$

Οὕτω ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν φθίνουσά ἀκολουθίαν τριγώνων $\Delta, \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(n)}, \dots$ ἕναστος τῶν ὁποίων περιέχεται εἰς τό προηγούμενόν του ($\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$). Ἡ τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(n)}$ εἶναι, δυνάμει τοῦ θεωρήματος I-1-3 τοῦ Cantor, ἕνα συμπαγές σύνολον. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀκολουθία τῶν διαμέτρων $\delta(\Delta^{(n)})$ τῶν συμπαγῶν συνόλων $\Delta^{(n)}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, διότι $\delta(\Delta^{(n)}) \leq \frac{1}{2^n} \delta(\Delta)$, ἡ ἀνωτέρω τομή ἐμφυλίζεται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω z_0 .

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον z_0 κεῖται ἐντός ἢ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ τριγώνου Δ καὶ ἐπειδὴ ἔξ ὑποθέσεως ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ z_0 δά έχωμεν:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + (z - z_0) R(z, z_0) \quad (6)$$

$$\text{ὅπου } \lim_{z \rightarrow z_0} R(z, z_0) = 0$$

Ἐφ' ὅσον $\lim_{z \rightarrow z_0} R(z, z_0) = 0$ ἔπεται ὅτι, διὰ πᾶθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἕνα $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ νά έχωμεν $|R(z, z_0)| < \varepsilon$

Ὁλοκληρώνοντες τὴν (6) κατὰ μήκος τῆς περιμέτρου τοῦ $\Delta^{(n)}$ εὐρίσκουμεν:

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = f(z_0) \cdot \int_{\Delta^{(n)}} dz + f'(z_0) \cdot \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) dz + \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) R(z, z_0) dz \quad (7)$$

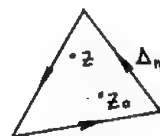
Ὡς γνωστόν, (βλ. παράδειγμα 1^ο), ἔστι,

$$\int_{\Delta^{(n)}} dz = \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) dz = 0$$

Ὅθεν, ἡ (7) γράφεται:

$$\int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = \int_{\Delta^{(n)}} (z - z_0) \cdot R(z, z_0) dz \quad (8)$$

Ἐάν 2τ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου Δ , τότε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου $\Delta^{(n)}$ θά εἶναι $\frac{2\tau}{2^n}$. Ἐάν z εἶναι ἓνα τυχόν σημεῖον τοῦ τριγώνου $\Delta^{(n)}$ (βλ. Σχ. 2), τότε θά ἔχωμεν $|z - z_0| < \frac{2\tau}{2^n}$. Δυνάμεθα δέ νά εὕρωμεν διά τό δοθέν $\varepsilon > 0$ ἓνα N τοιοῦτον, ὥστε διά $n \geq N$ νά ἔχωμεν: $\frac{2\tau}{2^n} < \delta(\varepsilon)$ καί οὕτω ἐπιτυγχάνομεν: $|z - z_0| < \frac{2\tau}{2^n} < \delta(\varepsilon)$.



Σχ. 2

Ἐκ τῆς (8) λοιπόν λαμβάνομεν:

$$\left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \int_{\Delta^{(n)}} |z - z_0| \cdot |R(z, z_0)| \cdot d\ell \leq \frac{2\tau}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \int_{\Delta^{(n)}} d\ell = \frac{2\tau}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2\tau}{2^n} = \frac{4\tau^2 \cdot \varepsilon}{4^n} \quad (9)$$

ἘΞ ἄλλου ἔχομεν:

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \frac{4\tau^2 \cdot \varepsilon}{4^n} = 4\tau^2 \cdot \varepsilon \quad (10)$$

Ἡ σχέση (10) ἰσχύει διά κάθε $\varepsilon > 0$, ὁθεν θά πρέπει:

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0$$

Β^ο. (Περίπτωσης ἑνός υλειτουργοῦ πολυγώνου). Ἄς θεωρήσωμεν τό υλειτουργόν πολυγωνιόν χωρίον $AB\Gamma\Delta E Z$ ὡς τοῦτο δεικνύεται εἰς τό Σχῆμα 3 καί ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικῇ ἐπ' αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς εὐθείας $A\Gamma$, $A\Delta$ καί $A E$ ὅτε τοῦτο χωρίζεται εἰς τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta E$ καί $A E Z$, ὅπου δι' ἕναστος ἐξ αὐτῶν, συμφώνως πρὸς τό 1^ο βῆμα ἰσχύει τό θεώρημα. Λαμβάνοντες δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\int_{A\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma A} f(z) dz$ κ.τ.λ. θά ἔχωμεν:

$$\int_{AB\Gamma\Delta E Z} f(z) dz = \int_{AB\Gamma A} f(z) dz + \int_{A\Gamma\Delta A} f(z) dz + \int_{A\Delta E A} f(z) dz + \int_{A E Z A} f(z) dz = 0.$$

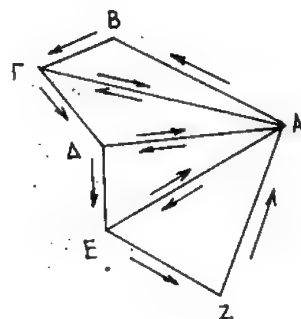
ABΓΔΕΖΑ

ABΓA

AΓΔA

AΔEA

AEZA



Σχ. 3

Γ^{ov}. (ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ ΥΛΕΙΣΤΗΣ ΥΑΜΠΥΛΗΣ) Ἄν θεωρήσωμεν τὴν τμηματιῶς λεία υλειστή υαμπύλη C, τότε συμφώνως πρὸς τὸ Λήμμα VI-2-1, διὰ υάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία υλειστή πολυγωνιυή γραμμή L τοιαύτη, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$\left| \int_C f(z) dz - \int_L f(z) dz \right| < \varepsilon \quad (11)$$

Εἶναι ὅμως, συμφώνως πρὸς τὴν περίπτωσιν τοῦ υλειστοῦ πολυγώνου $\int_L f(z) dz = 0$ καί οὕτω ἡ (11) γίνεται:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < \varepsilon \quad (12)$$

Ἐκ τῆς (12) λοιπὸν ἔπεται $\int_C f(z) dz = 0$

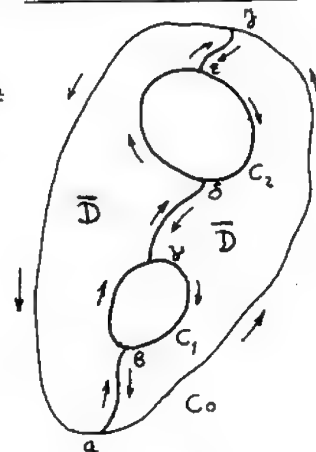
Οὕτω ἐδείχθη τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῶν Cauchy-Goursat.

• Ἐστωσαν $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, $n+1$ τὸ πλῆθος τμηματιῶς λείαι καί κλεισταί υαμπύλαι τοῦ Jordan τοιαῦται ὥστε, αἱ υαμπύλαι C_1, C_2, \dots, C_n υεῖνται πᾶσαι ἐντὸς τῆς C_0 καί μὴ τεμνόμεναι μεταξύ των. Τότε τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν υειμένων ἐντὸς τῆς C_0 καί ἐντὸς τῶν n υαμπύλων C_1, C_2, \dots, C_n ἀποτελεῖ ὡς λέγομεν ἓνα $(n+1)$ -συνε-υτιυόν πεδίου \bar{D} τοῦ ὁποῦ τοῦ σύνορον συνίσταται ἀπὸ τὰς $n+1$ υαμπύλας $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$.

Θεώρημα VI-2-2. Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτιυή ἐπὶ τοῦ \bar{D} , τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz$$

ὅπου αἱ υαμπύλαι $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ θεωροῦνται διαγραφόμε-ναι κατὰ τὴν δετιυήν φοράν.



Σχ. 1.

Ἀπόδειξις: Θ' ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διὰ τὴν περίπτωσιν $n=2$ (βλ. Σχ.1). Πρὸς τοῦτοις φέρομεν τὰ βοηθητιυά τόξα $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ καί $\varepsilon\zeta$ ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ Σχ.1. καί οὕτω τὸ χωρίον \bar{D} χωρίζεται εἰς δύο υλειστά καί

φραγμένα χωρία φρασσόμενα ὑπὸ τῶν υαμπύλων Γ καί Γ' εἶναι δέ, $\Gamma = \alpha\zeta\epsilon\delta\gamma\beta\alpha$

και $\Gamma' = \alpha\beta\gamma\delta\epsilon\zeta\alpha$. Συμφώνως προς το θεώρημα VII-2-1 των Cauchy-Goursat θα έχουμε:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\Gamma'} f(z) dz = 0$$

Διά προσθέσεως των ανωτέρω ισοτήτων ευρίσκουμεν:

$$\left\{ \int_{\alpha\beta} + \int_{\beta\gamma} + \int_{\gamma\delta} + \int_{\delta\epsilon} + \int_{\epsilon\zeta} + \int_{\zeta\alpha} \right\} + \left\{ \int_{\alpha\beta} + \int_{\beta\gamma} + \int_{\gamma\delta} + \int_{\delta\epsilon} + \int_{\epsilon\zeta} + \int_{\zeta\alpha} \right\} = 0.$$

Λαμβάνοντες δε υπ' όψιν ότι: $\int_{\alpha\beta} f(z) dz = - \int_{\beta\alpha} f(z) dz$ κ.τ.λ. θα λάβωμεν εν τής

ανωτέρω ισότητος:

$$\left\{ \int_{\alpha\beta} + \int_{\beta\alpha} \right\} - \left\{ \int_{\beta\gamma} + \int_{\gamma\beta} \right\} - \left\{ \int_{\gamma\delta} + \int_{\delta\gamma} \right\} = 0 \quad \eta$$

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

* Εφαρμογή. Νά υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_C \frac{dz}{z}$, ὅπου C εἶναι μία τμηματικῶς λεία καμπύλη τοῦ Jordan ἡ ὁποία: 1^{ον} δὲν ἐγκυλίνει τὸ σημεῖον $z=0$. 2^{ον} Ἐγκυλίνει τὸ σημεῖον $z=0$.

Λύσις: 1^{ον} Ἐστω ὅτι ἡ C δὲν ἐγκυλίνει τὸ σημεῖον $z=0$. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{z}$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τῆς καμπύλης C , ἔπεται ὅτι σύμφωνα πρὸς τὸ θεώρημα τῶν Cauchy-Goursat θὰ εἶναι $\int_C \frac{dz}{z} = 0$.

2^{ον} Ἐστω ὅτι ἡ C ἐγκυλίνει τὸ σημεῖον $z=0$. θεωροῦμεν ἕναν κύκλον C_p μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $z=0$ καὶ ἀκτίνα ρ . Τότε, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VII-2-2, θὰ ἔχωμεν:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_p} \frac{dz}{z} \quad (1)$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ υπολογίσωμεν τὸ δεῦτερον ὁλοκλήρωμα.

Επειδή $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ θα είναι $dz = i \cdot \rho \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta = i \cdot z \cdot d\theta$ ή $\frac{dz}{z} = i d\theta$. Όθεν ό (1) γίνεται:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_\rho} i d\theta = i \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Γενικώτερον θεωρούμεν τό ολοκληρώμα: $\int_C \frac{dz}{z-z_0}$, όπου C είναι μία τμηματικώς λεία καμπύλη του Jordan περιελθούσα τό σημείον $z = z_0$. Θέτοντες $z - z_0 = \eta$, τότε θα έχωμεν $dz = d\eta$ καί ούτω τό ανωτέρω ολοκληρώμα γράφεται:

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_{C'} \frac{d\eta}{\eta} \quad (2)$$

όπου ή καμπύλη C' περιελθεί τό σημείον $z = 0$. Συμφώνως λοιπόν πρός τ' ανωτέρω θα έχωμεν:

$$\int_{C'} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{C'} \frac{d\eta}{\eta} = 2\pi i$$

Τέλος, εάν τό σημείον $z = z_0$ υπέται εντός της C , τότε θα έχωμεν: $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 0$, επειδή ή συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ είναι αναλυτική εντός καί επί της C .

Θεώρημα VI-2-3. Έστω ότι ή συνάρτησις $f(z)$ είναι αναλυτική εις ένα απλώς συνευκτινόν χωρίον G . Τότε τό ολοκληρώμα:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta$$

λαμβάνόμενον κατά μήκος καθε τμηματικώς λείας καμπύλης υπεμένης εντός του G μέ σταθερόν τό αρχικόν σημείον z_0 καί μεταβλητόν τό τελικόν σημείον z , όρίζει μίαν μονότιμον αναλυτικήν συνάρτησιν εντός του G μέ παράγωγον δομένην υπό της σχέσεως $F'(z) = f(z)$.

Απόδειξις: θεωρούμεν τό κατωθι πηλίτον διαφορών:

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \cdot \left\{ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\eta) d\eta - \int_{z_0}^z f(\eta) d\eta \right\} = \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} f(\eta) d\eta \quad (1)$$

Τήν τελευταίαν ολοκληρώσιν θεωρούμεν ότι γίνεται επί του ευθυγράμμου τμή-

ματος που ένωνει τὰ σημεῖα z καὶ $z + \Delta z$.

$$\text{Ἐξ ἄλλου, } f(z) = f(z) \cdot \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} d\eta = \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} f(\eta) d\eta \quad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \cdot \int_z^{z+\Delta z} \{f(\eta) - f(z)\} d\eta \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ $f(\eta)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον z ἔπεται ὅτι, διὰ πᾶθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἓνα $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε ἐάν $|z - \eta| < \delta(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν $|f(\eta) - f(z)| < \varepsilon$.

Λαμβάνοντες λοιπὸν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῆς (3) καὶ λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς $f(z)$ καὶ τῆς 6ης ἰδιότητος τῆς §1 θὰ ἔχωμεν :

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \max_{\eta \in [z, z+\Delta z]} |f(\eta) - f(z)| \cdot |\Delta z| \leq \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon = \varepsilon, \text{ διὰ } |z - \eta| < \delta(\varepsilon).$$

Ὅθεν,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \quad \eta$$

$$F'(z) = f(z).$$

Παρατήρησις: Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δὲν ἐυλόγησαμεν χρῆσιν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις, ἀλλὰ ὅτι αὕτη εἶναι συνεχὴς. Δυνάμεθα λοιπὸν ν' ἀντιμεταστήσωμεν τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀναλυτικότητος τῆς συναρτήσεως ὑπὸ τῆς ὑποθέσεως ὅτι, αὕτη εἶναι συνεχὴς καὶ ἐπὶ πλέον τὸ ὁλοκλήρωμα ταύτης κατὰ μῆκος πᾶθε τμηματικῶς λείας υἱειστοῦς καμπύλης κλειμένης ἐντὸς τοῦ G μηδενίζεται.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὀρίσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀόριστου ὁλοκληρώματος.

Μία συνάρτησις $F(z)$ τοιαύτη ὥστε $F'(z) = f(z)$ καλεῖται ἀόριστον ὁλοκλήρωμα ἢ παράγουσα τῆς $f(z)$ καὶ συμβολίζεται οὕτω: $\int f(z) dz$.

Ὅστε ἐξ ὀρισμοῦ: $F(z) = \int f(z) dz \iff F'(z) = f(z)$.

π.χ. $\int \eta \mu z dz = -\sigma \nu z + c$, διότι $\frac{d(-\sigma \nu z + c)}{dz} = \eta \mu z$

$$\int \frac{dz}{z} = \log z + c, \text{ διότι } \frac{d(\log z + c)}{dz} = \frac{1}{z}, 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

Όπως, και διά τας πραγματιυάς συναρτήσεις ούτω και διά τας μιγαδικάς ισχύει ο τύπος :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

όπου $F(z)$ είναι ένα άοριστον όλοκληρώμα της $f(z)$.

Τό άριστερόν μέλος του άνωτέρω τύπου ευφράζει το "ώ ρ ι σ μ έ ν ο ν ό λ ο -
μ η ή ρ ω μ α " της $f(z)$ ως διαφορά μεταξύ δύο τιμών του άοριστου
όλοκληρώματος αυτής.

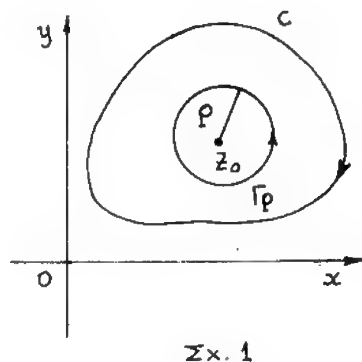
§3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ CAUCHY

Θεώρημα VI-3-1 (Πρώτος όλοκληρ. τύπος του Cauchy). "Εστω ότι ή συνάρτησις $f(z)$ είναι αναλυτική εις τό πεδίο G περιέχον μίαν τμηματιυά λεία κλειστή καμπύλη του Jordan C καθώς και τά έσωτερικά σημεία αυτής. Εάν τό z_0 είναι ένα σημείον έγκυλιούμενον υπό της C , τότε θα έχωμεν :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

Απόδειξις: Εάν τό z_0 έγκυλίζεται υπό της C , τότε ή συνάρτησις $f(z)/(z - z_0)$ είναι αναλυτική εκτός του σημείου $z = z_0$. Εάν Γ_ρ είναι ένας κύκλος κέντρου z_0 και ακτίνας ρ (βλ. Σχ.1) τότε, συμφώνως προς τό θεώρημα VI-2-2, θα έχωμεν :

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (1)$$



Επειδή τό όλοκληρώμα του άριστερού μέλους του τύπου (1) είναι ανεξάρτητον της έυλογής της καμπύλης C και τό όλοκληρώμα του δεξιού μέλους θα έχη όμοίως την αυτήν ιδιότητα.

Διά τά σημεία της περιφέρειας Γ_ρ έχομεν : $z = z_0 + \rho \cdot e^{i\theta}$

Διά της άντιστασάσεως τό δεξιόν μέλος της (1) καθίσταται :

$$\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} f(z) d\theta \quad (2)$$

$$\text{Είναι δε, } \int_0^{2\pi} f(z) d\theta = \int_0^{2\pi} [f(z) - f(z_0)] d\theta + \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = \int_0^{2\pi} [f(z) - f(z_0)] d\theta + 2\pi f(z_0) \quad (3)$$

Άρκει ήδη να δείξωμεν ότι $\int_0^{2\pi} [f(z) - f(z_0)] d\theta = 0$.

Επειδή η $f(z)$ είναι αναλυτική επί του G θα είναι τότε και συνεχής επ' αυτού ήτοι, διάκάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διά $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ θα ἔχωμεν: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

$$\text{Είναι δε, } \left| \int_0^{2\pi} [f(z) - f(z_0)] d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z) - f(z_0)| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta = 2\pi\varepsilon, \text{ διά καθε } \varepsilon > 0$$

$$\text{Ὅθεν, } \int_0^{2\pi} [f(z) - f(z_0)] d\theta = 0 \quad (4)$$

Λόγω τῆς (2) θα ἔχωμεν:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \quad \text{ἢ}$$

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Θεώρημα VII-3-2. (Δεύτερος ὁλοκλ. τύπος τοῦ Cauchy) Ἐστω ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτική εἰς ἓνα πεδῖον G περιέχον μίαν τμηματικῶς λεία κλειστή καμπύλην τοῦ Jordan C καὶ τὰ ἐσωτερικά σημεία αὐτῆς. Ἐάν z_0 εἶναι ἓνα σημεῖον ἐγκλειόμενον ὑπὸ τῆς C , τότε θα ἔχωμεν:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}$$

Ἀπόδειξις: Ἐστω ἓνα δεύτερον σημεῖον $z_1 \neq z_0$ ἐγκλειόμενον ὑπὸ τῆς C . Ἐφαρμόζοντες τὸν πρῶτον ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ Cauchy ἔχομεν:

$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{1}{2\pi i (z_1 - z_0)} \int_C f(z) \left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_0} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_1)(z - z_0)} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} + \frac{(z_1 - z_0)}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2 (z - z_1)} \quad (1)$$

"Όταν τό $z_1 \rightarrow z_0$ τό άριστερόν μέλος τής άνωτέρω ισότητος τείνει πρός τήν πραγματιυτήν συνάρτησιν $f'(z_0)$. "Ινα άποδείξωμεν τό άνωτέρω θεώρημα άρκει ν'άδειξωμεν ότι:

$$\lim_{z_1 \rightarrow z_0} (z_1 - z_0) \cdot \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2 (z - z_1)} = 0 \quad (2)$$

"Ινα άποδείξωμεν τήν (2) άρκει ν'άποδείξωμεν ότι διά $z \rightarrow z_0$ τό όλοκληρώμα $\int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2 (z - z_1)}$ παραμένει φραγμένον. "Επειδή ή $f(z)$ είναι αναλυτική επί τής C έπεται ότι ύπάρχει ένα $M > 0$ τοιοϋτον, ώστε $|f(z)| \leq M$. "Εστω ℓ τό μήκος τής C και $\delta = \inf_{z \in C} |z - z_0|$ είναι δέ $\delta > 0$.

"Εάν $|z_1 - z_0| < \delta$ και $z \in C$ θα έχωμεν:

$$|z - z_1| = |(z - z_0) - (z_1 - z_0)| \geq \delta - |z_1 - z_0|.$$

$$\text{"Οθεν,} \quad \left| \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2 (z - z_1)} \right| \leq \int_C \frac{|f(z)| d\ell}{|z - z_0|^2 |z - z_1|} \leq \frac{M \cdot \ell}{\delta^2 \{\delta - |z_1 - z_0|\}}$$

και οϋτω του $z_1 \rightarrow z_0$ τό όλοκληρώμα φράσσεται υπό του $\frac{M \cdot \ell}{\delta^3}$.

Υπαρξεις παραγώγων πάσης τάξεως μιās αναλυτικής συναρτήσεως:

"Η μέθοδος τής άποδείξεως ή χρησιμοποιηθείσα εις τά προηγούμενα θεωρήματα δύναται νά χρησιμοποιηθῇ διά τήν άπόδειξιν ύπαρξεως τής δευτέρας παραγώγου $f''(z_0)$ και γενικώς παραγώγων άνωτέρας τάξεως μιās αναλυτικής συναρτήσεως $f(z)$.

Θεώρημα VI-3-3. "Εάν ή $f(z)$ είναι αναλυτική εις ένα πεδιον G , τότε ή $f(z)$ έχει παραγώγους πάσης τάξεως εν G , ή δέ παράγωγος ή $n^{\text{η}}$ ς τάξεως δίδεται υπό του τύπου:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad z_0 \in G, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

όπου C είναι μία τμηματιυώς λεία κλειστή καμπύλη του Jordan έχουδείουσα τό σημειον z_0 και τοιαύτη, ώστε ή C και τά έσωτεριυά σημεία αύτῆς νά περιέχωνται εις τό G .

Απόδειξις: Εάν z_1 εγγιζείται υπό της C και είναι $z_1 \neq z_0$ χρησιμοποιώντας τον δεύτερον όλουθηρωτιονόν τύπον του Cauchy έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{f'(z_1) - f'(z_0)}{z_1 - z_0} &= \frac{1}{2\pi i(z_1 - z_0)} \cdot \int_C f(z) \left\{ \frac{1}{(z - z_1)^2} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right\} dz \\ &= \frac{2!}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3} + \frac{z_1 - z_0}{2\pi i} \cdot \int_C f(z) \frac{3(z - z_0) - 2(z_1 - z_0)}{(z - z_1)^2 \cdot (z - z_0)^3} dz \end{aligned}$$

Άρα νά δείξωμεν ότι, ο δεύτερος όρος του ανωτέρω τύπου τείνει πρὸς τὸ μηδέν του $z_1 \rightarrow z_0$. Τοῦτο δὲ ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς μεθόδου πού ἐχρησιμοποιήθη εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα. λαμβάνοντες λοιπὸν τὰ ὅρια ἔχομεν:

$$f''(z_0) = \lim_{z_1 \rightarrow z_0} \frac{f'(z_1) - f'(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^3}$$

Ὁ τελευταῖος τύπος ἀποδεικνύει τὴν ὑπαρξιν τῆς δευτέρας παραγώγου τῆς $f(z)$. Ἦτοι τὸ θεώρημα ἐδείχθη διὰ $n=2$. Ἐφαρμόζοντες ἤδη τὴν επαγωγικὴν μέθοδον ἀποδεικνύομεν τὸ θεώρημα διὰ τυχούσαν τιμὴν τοῦ n .

Παρατήρησις: Ὁ ανωτέρω τύπος συχνά ἐμφανίζεται καὶ οὕτω:

$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$, ὅπου εἰς τὴν θέσιν τοῦ z ἐθέσαμεν τὸ ζ καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ z_0 τὸ z .

• Ἐφαρμογή 1^η Νά υπολογισθῇ τὸ ὁλουθήρωμα: $\int_{|z|=3} \frac{(\eta\mu\pi z^2 + \sigma\upsilon\nu\pi z^2) dz}{(z-1)(z-2)}$

Λύσις: Ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ ἔχομεν:

$$I = \int_{|z|=3} \frac{\eta\mu\pi z^2 + \sigma\upsilon\nu\pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{|z|=3} \frac{\eta\mu\pi z^2 + \sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-2} dz - \int_{|z|=3} \frac{\eta\mu\pi z^2 + \sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-1} dz$$

Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τοῦ θεωρήματος VI-3-1 τοῦ Cauchy διὰ $z_0=2$ καὶ $z_0=1$ ἀντιστοίχως ἔχομεν:

$$\int_{|z|=3} \frac{\eta\mu\pi z^2 + \sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-2} dz = 2\pi i \left\{ \eta\mu\pi \cdot 2^2 + \sigma\upsilon\nu\pi \cdot 2^2 \right\} = 2\pi i$$

$$\int_{|z|=3} \frac{\eta\mu\pi z^2 + \sigma\upsilon\nu\pi z^2}{z-1} dz = 2\pi i \left\{ \eta\mu\pi \cdot 1^2 + \sigma\upsilon\nu\pi \cdot 1^2 \right\} = -2\pi i$$

Ὁθεν, $I = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.

23/. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα: $\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2} dz}{(z+1)^4}$

Λύσις: Εφαρμόσομεν τὸν γενικὸν τύπον τοῦ Cauchy, ἥτοι:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

διὰ $z_0 = -1$, $n=3$ καὶ $f(z) = e^{z^2}$ ἔχομεν:

$$(e^{z^2})'''_{z=-1} = \frac{3!}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^{z^2} dz}{(z+1)^4} \quad \eta'$$

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2} dz}{(z+1)^4} = \frac{2\pi i}{6} \cdot 8e^{-2} = \frac{8\pi i e^{-2}}{3}$$

Μία σπουδαία συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι ἡ ἀνολοδωδ:

Πρόταση VI-3-1. Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς ἓνα πεδίου G , τότε αἱ $u(x,y)$ καὶ $v(x,y)$ ἔχουν μεριμὰς παραγώγους πάσης τάξεως.

§ 4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΑΠΟΡΡΕΟΝΤΑ ΕΚ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ CAUCHY

Θεώρημα VI-4-1. (Μοτετα). Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ πεδίου G καὶ ὑποθέτομεν:

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

κατὰ μῆκος καὶ ἐκ τμηματικῶς λείας καλειστικῆς καμπύλης C καειμένης ἐντὸς τοῦ G , τότε ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ.

Ἀπόδειξις: Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VI-2-3 καὶ τὴν Παρατήρησιν τῆς §2 τὸ ὅλουλήρωμα:

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

λαμβάνομενον κατὰ μῆκος μιᾶς τμηματικῶς λείας καμπύλης C καειμένης ἐντὸς τοῦ G με ἀρχικὸν σημεῖον τὸ z_0 καὶ τελικὸν σημεῖον τὸ z , ὀρίσει μιαν μονότιμον ἀναλυτικὴν συνάρτησιν ἐντὸς τοῦ G τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος $F'(z) = f(z)$. Ἀλλὰ, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VI-3-3, ἐφ' ὅσον ἡ $F(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ θὰ ἔχῃ παραγώγους πάσης τάξεως διὰ καὶ $z \in G$, ἥτοι ὑπάρχει ἡ $F''(z)$ καὶ εἶναι $F''(z) = f'(z)$. Ὅθεν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ.

Θεώρημα VI-4-2. (Cauchy-Liouville). Κάθε συνάρτηση ή όποια είναι αναλυτική εις όλοουληρον τό επίπεδον και φραγμένη είναι σταθερά.

Απόδειξις: Διά πάδε $z \in \mathbb{C}$ έχομεν έξ υπόθεσεως: $|f(z)| < M$, όπου $M > 0$ (σταθερά). θεωρούμεν έναν κύκλον C αὐτίνος R μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων. Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα VI-3-2 τοῦ Cauchy έχομεν:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_C \frac{|f(\zeta)| d\ell}{|\zeta-z|^2} \quad (1)$$

Εἶναι ὅμως, $|\zeta-z| \geq |\zeta| - |z| = R - |z|$. Ὅθεν ή (1) γράφεται:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R}{(R-|z|)^2} = \frac{M \cdot R}{(R-|z|)^2} \quad (2)$$

Ἐάν $R \rightarrow \infty$ τότε ἐκ τῆς (2) προκύπτει ὅτι $f'(z) = 0$, συνεπῶς $f(z) = \text{σταθερά}$ διά πάδε $z \in \mathbb{C}$.

Ἐπεὺταίσις τοῦ θεωρήματος τῶν Cauchy-Liouville.

Θεώρημα VI-4-3. Ἐστω ή συνάρτησις $f(z)$ εἶναι αναλυτική ἐφ' όλοουλήρου τοῦ επιπέδου. θεωρούμεν μιαν ἀνολοουθίαν ὁμοκέντρων κύκλων τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες τείνουσι πρὸς τό ἀπειρον. Ἐάν ἀπό μιαν ὠρισμένην περιφέρειαν καί μετὰ ή συνάρτησις $f(z) \cdot z^k$, $k > 0$ παραμένη φραγμένη, τότε ή $f(z)$ εἶναι ἓνα πολυώνυμον βαθμοῦ οὐκί μεγαλυτέρου τοῦ k .

Απόδειξις: Ἐστω C ἓνας κύκλος μέ κέντρον τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί αὐτίνα R καί $M = \sup_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$. Ἐστω δέ z ἓνα τυχόν ἔσωτεριόν σημεῖον τοῦ κύκλου C . Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα VI-3-2 τοῦ Cauchy έχομεν:

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \int_C \frac{|f(\zeta)| d\ell}{(R-|z|)^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R}{(R-|z|)^{n+1}}$$

$$\text{"Ὅθεν,} \quad |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \cdot M \cdot R^{n+1}}{(R-|z|)^{n+1}} \quad (1)$$

Ἐάν $n > k$ καί τό $R \rightarrow \infty$ ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι $|f^{(n)}(z)| = 0$, συνεπῶς $f^{(n)}(z) = 0$ διά $n > k$. Ὅθεν, ή $f(z)$ εἶναι ἓνα πολυώνυμον βαθμοῦ $\leq k$. Τό ἀντίστροφον εἶναι τετριμμένη περίπτωση.

Θεώρημα VI-4-4. (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας). Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ με $n \geq 1$ και $a_n \neq 0$ έχει μίαν τουλάχιστον ρίζαν. (Έξ αυτού έπεται ότι ή $P(z) = 0$ έχει η τό πλήθος ρίζας).

Άπόδειξις: Τό πολυώνυμον $P(z)$ γράφεται $P(z) = z^n (a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}) \rightarrow \infty$ καθώς τό $z \rightarrow \infty$. Άς υποθέσωμεν ότι τό $P(z)$ δέν έχει ρίζας, τότε ή συνάρτησις $\frac{1}{P(z)} = Q(z)$ είναι αναλυτική εις όλούμηρον τό επίπεδον και επί πλέον $|Q(z)| \rightarrow 0$ του $z \rightarrow \infty$, ήτοι ή $|Q(z)|$ είναι φραγμένη. Όθεν, συμφώνως πρός τό Θεώρημα VI-4-2 του Liouville, ή $Q(z)$ άρα και ή $P(z)$ δά πρέπει νά είναι σταθερά, όπερ άτοπον.

Θεώρημα VI-4-5. (Άνισότης του Cauchy). Εάν ή $f(z)$ είναι αναλυτική επί ενός κύκλου C κέντρου z και ακτίνας R τότε ισχύει: $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$, όπου $M = \sup_{\eta \in C} |f(\eta)|$.

Άπόδειξις: Είναι $|\eta - z| = R$. Συμφώνως πρός τό Θεώρημα VI-3-2 του Cauchy έχουμε:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta - z)^{n+1}} \quad \text{και}$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \int_C \frac{|f(\eta)| d\ell}{|\eta - z|^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R}{R^{n+1}} = \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

Θεώρημα VI-4-6. (Θεώρημα της Μέσης τιμής-Gauss). Εάν ή $f(z)$ είναι αναλυτική εις τό έσωτεριόν και επί της περιφέρειας ένος κύκλου C κέντρου z_0 και ακτίνας R τότε ή τιμή της συναρτήσεως εις τό κέντρον του κύκλου ισούται πρός την μέσην αριθμητικήν της συναρτήσεως κατά μήκος της περιφέρειας, ήτοι:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta.$$

Άπόδειξις: Διά τό η της περιφέρειας έχουμε: $\eta = z_0 + R \cdot e^{i\theta}$, ότε $\eta - z_0 = R \cdot e^{i\theta}$ και $d\eta = i \cdot R \cdot e^{i\theta} d\theta$ και ούτω ό τύπος του Θεωρήματος VI-3-1 του Cauchy γίνεται:

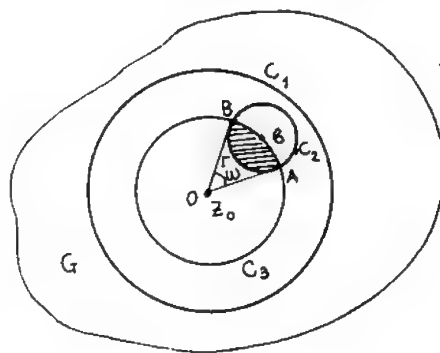
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} d\theta}{R \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

§ 5. ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΜΙΑΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Θεώρημα VI-5-1. Έστω μία συνάρτησις $f(z)$ η οποία είναι αναλυτική εις τόφραχ-
μένον πεδίοη G και συνεχής εις τό υλειστόη πεδίοη \bar{G} . Τότε τήν μεγίστην τιμήν
ή $|f(z)|$ τήν λαμβάνει επί του συνόρου του G , έυτός εάν ή $f(z)$ είναι σταθερά έ-
πί του G . δηλ. υπάρχει σημείοη β του συνόρου του G τοιούτου, ώστε: $|f(\beta)| = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)|$.

Απόδειξις: ΈΕ υποθέσεωα έχομεν ότι ή συνάρτησις $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ τών
δύο μεταβλητών είναι συνεχής επί του υλειστού πεδίοη \bar{G} . Όθεν, τόμος Β' θεωρ. V-1-1
αυτή λαμβάνει μίαν μεγίστην τιμήν, έστω M , εις υάποιο σημείοη $z_0 = (x_0, y_0) \in \bar{G}$. Αύ-
τό σημαίνει ότι: $M = |f(z_0)| \geq |f(z)|$ (1) διά υάθε $z \in \bar{G}$. Άς υποθέσωμεν ότι τό
σημείοη z_0 είναι ένα έσωτεριυόη σημείοη
ον του πεδίοη G (βλ. Σκ. 1).

Έστω C_1 ένας υύυλος έντός του πε-
δίοη G μέ υέντροη τό σημείοη z_0 . ΈΕται-
ρούντες τήν περίπτωση όπου ή $f(z)$ εί-
ναι σταθερά επί της περιφερείας C_1 , τό-
τε δά πρέπει νά υπάρχει ένα σημείοη, έστω
 β , τοιούτου ώστε $|f(\beta)| < M$ ή υπάρχει ένα
 $\epsilon > 0$ ώστε νά έχωμεν $|f(\beta)| = M - \epsilon$, $\epsilon > 0$:



Σκ. 1.

Έπειδή ή $f(z)$ είναι συνεχής επί του \bar{G} αυτό σημαίνει διά υάθε $\epsilon > 0$ συνεπώς
και διά τό άνωτέρω όρισθέν $\epsilon > 0$ υπάρχει έν $\delta > 0$ τοιούτου, ώστε νά έχωμεν:

$$|f(z) - f(\beta)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ διά } |z - \beta| < \delta. \quad (2)$$

$$\text{δηλ. } |f(z)| < |f(\beta)| + \frac{\epsilon}{2} = M - \epsilon + \frac{\epsilon}{2} = M - \frac{\epsilon}{2} \quad (3).$$

Η σχέση (3) ισχύει δι' όλα τά έσωτεριυά σημεία του υύυλου υέντροη β και
αυτίνος $\delta > 0$ (βλ. Σκ. 1).

Ήδη υατασμευάδωμεν έναν υύυλον C_3 μέ υέντροη τό z_0 διερχόμενον διά του ση-
μείοη β . Διά τά z του μέρους του υύυλου αυτού ό όποίος τέμνεται υπό του υύ-
υλου C_2 και τό όποίον άς υαλέσωμεν $AB\Gamma$ έχομεν ισχύουσαν τήν σχέσηιν (3).

ήτοι: $|f(z)| < M - \frac{\epsilon}{2}$. Διά δέ τά z του έναπομένοντος τμήματος του C_3 δά έ-
χωμεν: $|f(z)| \leq M$.

Έστω $\angle AOB = \omega$ (μετρουμένη από τήν θέσιν OA και υατά τήν αντίθετον φοράν

πρός την υήνησιν τών δειυτών του ώρολογίου) και Έστω $r = |z - z_0|$. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VI-4-6 τοῦ Gauss ἔχομεν:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega} f(z_0 + r \cdot e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega}^{2\pi} f(z_0 + r \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Ὅθεν, } |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega} |f(z_0 + r \cdot e^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega}^{2\pi} |f(z_0 + r \cdot e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega} (M - \frac{\epsilon}{2}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega}^{2\pi} M d\theta = \frac{\omega}{2\pi} (M - \frac{\epsilon}{2}) + \frac{M}{2\pi} (2\pi - \omega) = M - \frac{\omega \cdot \epsilon}{4\pi}. \end{aligned}$$

δηλ. $M = |f(z_0)| \leq M - \frac{\omega \cdot \epsilon}{4\pi}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον.

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι ἡ $|f(z)|$ δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ μεγίστην τιμὴν εἰς τὸ ἐσωτερικόν τοῦ G καὶ ὑπ' ἀνάγκην τὴν μεγίστην τιμὴν θὰ πρέπει νὰ τὴν λαμβάνῃ ἡ $|f(z)|$ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G .

Θεώρημα VI-5-2. Ἐστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπὶ τοῦ φραγμένου πεδίου G καὶ συνεχὴς εἰς τὸ κλειστόν πεδῖον \bar{G} καὶ ἐπὶ πλεόν δὲν μηδενίζεται διὰ καθε $z \in G$. Τότε ἡ $|f(z)|$ λαμβάνει μίαν ἐλάχιστην τιμὴν ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G .

Ἀπόδειξις: Ἡ $f(z)$ θὰ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ \bar{G} καὶ ἐπὶ πλεόν εἶναι $f(z) \neq 0$. Ὅθεν καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ θὰ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ \bar{G} καὶ συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ $|\varphi(z)|$ θὰ λαμβάνῃ μίαν μεγίστην τιμὴν οὐκ ἐπὶ τοῦ G ἀλλὰ ἐπὶ τοῦ συνόρου τούτου. Ἀρα καὶ ἡ $|f(z)| = \frac{1}{|\varphi(z)|}$ θὰ λαμβάνῃ μίαν ἐλάχιστην τιμὴν ἐπὶ τοῦ συνόρου G .

Πόρισμα VI-5-1. Ἐστω ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπὶ τοῦ φραγμένου πεδίου G καὶ συνεχὴς εἰς τὸ πεδῖον \bar{G} μὴ μηδενιζομένη διὰ καθε $z \in G$ καὶ ἐπὶ πλεόν εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G . Τότε ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ \bar{G} .

Ἀπόδειξις: Ἐστω Γ τὸ σῆμα τοῦ G . Τότε, συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα θεωρήματα, ὑπάρχουν δύο σημεῖα ἔστωσαν η καὶ η' τοῦ συνόρου Γ τοιαῦτα ὥστε δι' αὐτὰ ἡ $|f(z)|$ νὰ λαμβάνῃ τὴν μεγίστην καὶ ἐλάχιστην τιμὴν ἀντιστοιχῶς ἐπὶ τοῦ Γ .

ἢ ἔξ ὑποθέσεως ὅμως $|f(\gamma)| = |f(\gamma')|$, συνεπῶς $\max_{z \in \bar{G}} |f(z)| = \min_{z \in \bar{G}} |f(z)|$. Ὅθεν, ἢ $|f(z)|$ εἶναι σταθερά ἐπὶ τοῦ \bar{G} . Τότε συμφώνως πρὸς τὴν 24^ν Ἐφαρμογὴν τῆς § 3 τοῦ κεφ. III ἢ $f(z)$ θὰ εἶναι σταθερά ἐπὶ τοῦ \bar{G} .

§ 6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΙΣ ΤΑΣ ΑΡΜΟΝΙΚΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἀρχὴ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου μέτρου μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εὐρίσκει ἓναν ἱκανοποιητικὸν ἀριθμὸν ἐφαρμογῶν εἰς τὰς ἀρμονικὰς συναρτήσεις. Παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰς ἐξ αὐτῶν.

Πρότασις VII-6-1. Ἐάν ἡ $u(x, y)$ εἶναι μία ἀρμονικὴ συνάρτησις καὶ διάφορος σταθερᾶς ἐντὸς τοῦ πεδίου G , τότε ἡ $u(x, y)$ δὲν λαμβάνει οὔτε τὴν μεγίστην οὔτε τὴν ἐλαχίστην τῆς τιμὴν ἐντὸς τοῦ G .

Ἀπόδειξις: Ἐστω (x_0, y_0) ἓνα σημεῖον τοῦ G καὶ ἔστω K μία περιοχὴ τοῦ (x_0, y_0) εὐρισκομένη ἐντὸς τοῦ G . θεωροῦμεν τὴν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ἐντὸς τῆς περιοχῆς K τότε καὶ ἡ συνάρτησις μέτρου $F(z) = e^{f(z)}$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τῆς περιοχῆς K , διότι, $F'(z) = e^{f(z)} \cdot f'(z)$. Ἐπὶ πλεον τῇ συνάρτησις $F(z)$ δὲν μηδενίζεται ἐντὸς τῆς περιοχῆς K καὶ ἔχει μέτρον $|F(z)| = |e^{u(x, y)} \cdot e^{i v(x, y)}| = |e^{u(x, y)}| \cdot |e^{i v(x, y)}| = e^{u(x, y)} \cdot 1 = e^{u(x, y)}$.

Ἡ συνάρτησις $u(x, y)$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἓνα μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) , διότι τότε καὶ ἡ συνάρτησις $|F(z)|$ θὰ ἐλάμβανεν ἓνα μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον $z_0 = x_0 + i y_0 \in K$ γεγονός πού ἀντιβαίνει πρὸς τὸ θεώρημα VII-5-1 (Ἀρχὴ τοῦ μεγίστου μέτρου). Ἀναλόγως ἡ $u(x, y)$ δὲν δύναται νὰ λαμβάνῃ ἓνα ἐλάχιστον εἰς ἑνὸς σημεῖον $(x', y') \in K$, διότι τότε καὶ ἡ $|F(z)|$ θὰ ἐλάμβανε ἓνα ἐλάχιστον εἰς τὸ σημεῖον $z' = x' + i y' \in K$ γεγονός πού ἀντιβαίνει πρὸς τὸ θεώρημα VII-5-2 (Ἀρχὴ τοῦ Ἐλαχίστου Μέτρου).

Πρότασις VII-6-2 Ἐστω G ἓνα φραγμένον πεδῖον καὶ $u(x, y)$ μία ἀρμονικὴ συνάρτησις ἐντὸς τοῦ G καὶ συνεχὴς ἐντὸς τοῦ \bar{G} . Τότε τὸ σύνολον τοῦ G περιέχει δύο σημεία (E, η) καὶ (E', η') τοιαῦτα, ὥστε $u(E, \eta) = \max_{(x, y) \in \bar{G}} u(x, y)$, $u(E', \eta') = \min_{(x, y) \in \bar{G}} u(x, y)$.

Απόδειξις: Θεωρούμεν τὴν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$. ὅς ἐδείχθη καὶ εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν ἡ συνάρτησις $F(z) = e^{f(z)}$ εἶναι ἀναλυτικὴ. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VI-5-1 ὑπάρχει ἓνα σημεῖον $\eta = \xi + i\eta$ τοῦ συνόρου τοῦ G τοιοῦτον, ὥστε $\eta = \max_{z \in \bar{G}} |F(z)|$, ἥτοι $e^{u(\xi,\eta)} = \max_{(x,y) \in \bar{G}} e^{u(x,y)}$ καὶ κατὰ συνέπειαν $u(\xi,\eta) = \max_{(x,y) \in \bar{G}} u(x,y)$. Ἀνάλογος ἀπόδειξις καὶ διὰ τὸ ἐλάχιστον.

Πρότασις VI-6-3. Ἐστω τὸ φραγμένον πεδίον G καὶ ἡ συνάρτησις $u(x,y)$ ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G καὶ συνεχὴς ἐντὸς τοῦ \bar{G} . Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G . Τότε ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ παντοῦ ἐντὸς τοῦ G .

Απόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G , ἔπεται συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν ὅτι ἡ μέγιστη καὶ ἡ ἐλάχιστη τιμὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G εἶναι ἴσαι καὶ ὡς ἐκ τούτου καὶ πᾶσαι αἱ "ἐνδιάμεσοι" τιμαὶ ποὺ λαμβάνει ἡ $u(x,y)$ ἐντὸς τοῦ G εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ μάλιστα ἴσαι πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλάχιςτου τῆς $u(x,y)$ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G . Ἀρα ἡ $u(x,y)$ εἶναι σταθερὰ ἐντὸς τοῦ G .

Πόρισμα VI-6-1. Ἐστω τὸ φραγμένον πεδίον G καὶ $u_1(x,y), u_2(x,y)$ δύο ἁρμονικαὶ συναρτήσεις ἐντὸς τοῦ G καὶ συνεχεῖς ἐντὸς τοῦ \bar{G} . Ὑποθέτομεν, ὅτι εἰς καθεστὸς τοῦ συνόρου G εἶναι $u_1(x,y) \equiv u_2(x,y)$. Τότε $u_1(x,y) \equiv u_2(x,y)$ παντοῦ ἐντὸς τοῦ \bar{G} .

Απόδειξις: Ἡ συνάρτησις $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ ἱκανοποιεῖ τὰς ὑποθέσεις τῆς προηγουμένης προτάσεως καὶ εἶναι μηδέν παντοῦ ἐπὶ τοῦ συνόρου τοῦ G . Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἡ $u(x,y)$ θὰ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς μηδέν διὰ καθεστὸς $(x,y) \in \bar{G}$, δηλ. θὰ ἔχωμεν $u_1(x,y) \equiv u_2(x,y)$ διὰ καθεστὸς $(x,y) \in \bar{G}$.

Πρότασις VI-6-4. Ἐστω ἡ συνάρτησις $F(w) = F(u+iv)$ ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονικὴ εἰς τὸ πεδίον D καὶ ἡ συνάρτησις $w = f(z) = f(x+iy)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεδίον G λαμβάνουσα τὰς τιμὰς τῆς ἐντὸς τοῦ D . Τότε ἡ σύνθεσις τῶν συναρτήσεων $F(f(z))$ εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G .

Απόδειξις Θεωρούμε την F ως συνάρτησιν τῶν u καὶ v , ὅπου $u = u(x, y)$ καὶ $v = v(x, y)$ καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν §8, II τοῦ Κεφ. II, Β^α τόμου θὰ ἔχωμεν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= (u'_x + i v'_x)^2 \frac{d^2 F}{dw^2} + (u''_{xx} + i v''_{xx}) \frac{dF}{dw} \\ \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= (u'_y + i v'_y)^2 \frac{d^2 F}{dw^2} + (u''_{yy} + i v''_{yy}) \frac{dF}{dw} \end{aligned} \right\} (1)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς συνθήκας Cauchy-Riemann, ἴπτοι: $u'_x = v'_y$ καὶ $u'_y = -v'_x$ καὶ ὡς καὶ τὰς σχέσεις $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ (αἱ u, v εἶναι ἄρμονικαὶ συναρτήσεις) διὰ προσθέσεως τῶν (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν τελικῶς $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, ἤτοι ἡ F εἶναι ἄρμονική.

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

- Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\int_C (12z^2 - 4i \cdot z) dz$ κατὰ μήκος τῆς καμπύλης C με εἰσῶσιν $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ καὶ μέ ἀρχικόν σημεῖον τὸ $(1, 1)$ καὶ τελικόν τὸ $(2, 3)$.
- Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\int_C |z| dz$, ὅπου ἡ καμπύλη C εἶναι:
 - Ἡ διανυσματικὴ αὐτὴς ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον $z = 2 - i$.
 - Τὸ ἡμικύκλιον $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ (Ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ σημεῖον $z = 1$).
 - Τὸ ἡμικύκλιον $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ (Ἡ ἀρχὴ εἶναι τὸ σημεῖον $z = -i$).
 - Ὁ κύκλος $|z| = R$.
- Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\int_C |z| \cdot \bar{z} dz$, ὅπου C εἶναι κλειστὴ καμπύλη ἡ ἀποτελουμένη ἀπὸ τὸ ἄνω ἡμικύκλιον $|z| = 1$ καὶ ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $-1 \leq x \leq 1, y = 0$.
- Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\int_C \frac{dz}{z^2 + 1}$, ἐὰν C εἶναι:
 - Ὁ κύκλος $|z - i| = 1$
 - Ὁ κύκλος $|z + i| = 1$
 - Ὁ κύκλος $|z| = 2$

(Πάντες οἱ κύκλοι διαγράφονται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν).

- Υπολογίσατε τὸ ὅλουλήρωμα $\int_{|z-a|=R} \frac{(z^4 + z^2 + 1) dz}{z(z^2 + 1)}$ συναρτήσει τοῦ R .

6. Δείξτε ότι: $\int F(z) \cdot G'(z) dz = F(z) \cdot G(z) - \int F'(z) G(z) dz$ και εν συνεχεία υπολογί-
σατε γὰ ὁλοκληρώματα:

i) $\int z e^{z^2} dz$ ii) $\int z^2 \eta \mu 4z dz$

iii) $\int (z+2) e^{iz} dz$ κατά μήκος τῆς παραβολῆς τῆς ὀρισμένης ὑπὸ τῆς ἐξί-
σώσεως $z^2 y = x^2$ ἀπὸ τὸ σημεῖον $(0,0)$ μέχρι τὸ $(\pi,1)$.

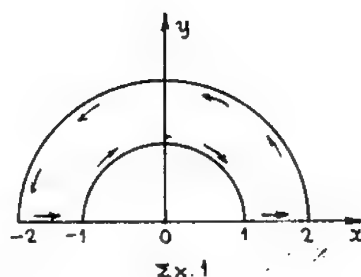
7. Ἄνευ τῆς χρήσεως τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τύπου τοῦ Cauchy νὰ υπολογισθῇ τὸ
ὁλοκληρώμα $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, $n=2,3,4,\dots$ ὅπου a εἶναι ἓνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς
λείας υδροεισῆς καμπύλης τοῦ Jordan C .

8. Δείξτε ὅτι $\int_C \frac{dz}{z^2+1} = 0$, ἐὰν C εἶναι μία τμηματικῶς λεία υδροειστὴ καμπύλη τοῦ
Jordan περιεχομένη εἰς τὸν δαυτύλιον $1 < |z| < R$.

9. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκληρώμα $\int_{|z|=1} z^a dz$, ὅπου a εἶναι ἓνας αὐθαίρετος μιγαδικὸς
ἀριθμὸς καὶ $1^a = 1$.

10. Δείξτε ὅτι $\int_{|z|=1} a^z dz = 0$ διὰ τὰδε ἐκλογὴ τῆς ἀρχικῆς
τιμῆς τῆς συνάρτησεως a^z .

11. Ὑπολογίσατε τὸ ὁλοκληρώμα $\int_C \frac{z dz}{z}$, ὅπου C εἶναι τὸ
σύνορον τοῦ ἡμιδαυτύλιου τοῦ δεικνυομένου εἰς τὸ Σκ. 1.



12. Δείξτε ὅτι: 19/ Ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς μίαν περιοχὴν τῆς ἀρχῆς, τότε:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(\rho \cdot e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$$

20/ Ἐὰν ἡ $f(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=a$, τότε:

$$\lim_{|z-a|=\rho} \int \frac{f(z) dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$$

13. Δείξτε ὅτι: $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ δι' ὅλας τὰς καμπύλας C_1 καὶ C_2 περιεχομένας

είναι ένα δοθέν πεδίο G με το αυτό άρχιόν και τελιόν σημείον, εάν και μόνον εάν $\int_C f(z) dz = 0$ διά τήδε δία υδιστή υαμπύλη C περιεχομένη έντός του G .

14. Νά υπολογισθῇ τό όλουλήρωμα: $\int_C \frac{dz}{z^2 + 9}$, εάν:

- Τό σημείον $3i$ υείται έντός της υαμπύλης C και τό σημείον $-3i$ υείται έυτός αυτής.
- Τό σημείον $-3i$ υείται έντός της υαμπύλης C και τό σημείον $3i$ υείται έυτός αυτής.
- Άμφότερα τά σημεία $3i$ και $-3i$ υείνται έντός της υαμπύλης C .

15. Νά υπολογισθῇ τό όλουλήρωμα: $\int_C \frac{z \cdot e^z dz}{(z-a)^3}$, όπου τό σημείον a υείται έντός της υαμπύλης C .

16. Υπολογίσατε τό όλουλήρωμα $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{z(1-z)}$, εάν:

- Τό σημείον 0 υείται έντός της υαμπύλης C και τό σημείον 1 υείται έυτός αυτής.
- Τό σημείον 1 υείται έντός και τό σημείον 0 υείται έυτός της C .
- Τά σημεία 0 και 1 υείνται άμφότερα έντός της υαμπύλης C .

17. Δείξατε ότι, εάν τό όλουλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)| dt$, όπου $P(t)$ είναι συνεχής συνάρτησις της πραγματικής μεταβλητικής t , συγυδίνη, τότε ή συνάρτησις $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t) dt}{t-z}$ είναι άναλυτική εις έυσαστον των χωρίων $\Im m z > 0$ και $\Im m z < 0$.

18. Νά υπολογισθῇ τό όλουλήρωμα: $\int_{|z|=1} \frac{\sin^2 t z}{z^3} dz$ διά $t > 0$.

19. Νά υπολογισθῇ τό όλουλήρωμα: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{6} + 2 e^{i\theta} \right) d\theta$

20. Νά εύρεθῇ τό μέγιστον της $|f(z)|$ επί του υύυδου $|z| \leq 1$ διά τας συναρτήσεις $f(z)$

αί όποΐαι δίδονται υπό των τύπων:

i) $z^2 - 3z + 2$, ii) $z^4 + z^2 + 1$, iii) $\eta\mu 2z$, iv) $\frac{2z-3}{2z+3}$

21. Νά υπολογισθῇ τό όλοκληρώμα $\int_C \frac{(e^z + z \sinh z)}{(z - \pi i)^3} dz$, όπου C εΐναι μία άπλή κλειστή αμπτυλή ἔχουσα $z_0 = \pi i$ εΐς τό ἔσωτεριόν της καί τό όλοκληρώμα κατά μήκος τῆς C λαμβάνεται κατά τήν θετικὴν φοράν.

22. Ἐστω C μία άπλή κλειστή αμπτυλή περιελείουσα τήν άρχήν. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{az}}{z^{n+1}} dz$$

23. Ἐστω $f(z)$ μία αναλυτικὴ συνάρτησις ἐντός καί ἐπὶ τοῦ κύκλου $\Gamma: z = R \cdot e^{i\theta}$ καί $z_0 = r_0 \cdot e^{i\theta_0}$ ἔσωτεριόν σημείον τοῦ Γ , δείξατε ὅτι:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} f(Re^{i\theta}) d\theta$$

Σημ. Ὁ τελευταῖος τύπος εΐναι γνωστός ὡς όλοκληρωτικὸς τύπος τοῦ Poisson.

24. Νά υπολογισθοῦν τὰ όλοκληρώματα:

α) $\int_C z \cdot Re z dz$, όπου $C: |z| = 1$ δηλ. περιφέρεια αΐτῆνος $R=1$ διαγραφόμενη κατὰ τήν θετικὴν φοράν.

β) $\int_C \frac{z \cdot Re z dz}{z - \frac{1}{2}}$, όπου $C: |z| = 1$, διαγραφόμενη κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΕΙΡΑΙ TAYLOR ΚΑΙ LAURENT

§ 1. ΣΕΙΡΑΙ TAYLOR

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Taylor, τὸ ὁποῖον εἶναι ἓνα ἀπὸ τὰ σημαντικώτερα τῆς θεωρίας τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων.

Θεώρημα VII - 1-1. Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ εἰς τὸ ἑσωτερικὸν ἑνὸς κύκλου C_0 μὲ κέντρον τὸ σημεῖον z_0 καὶ ἀκτίνα τ_0 . Τότε διὰ πάδε σημείου z ἐντὸς τοῦ C_0 θὰ ἔχωμεν:

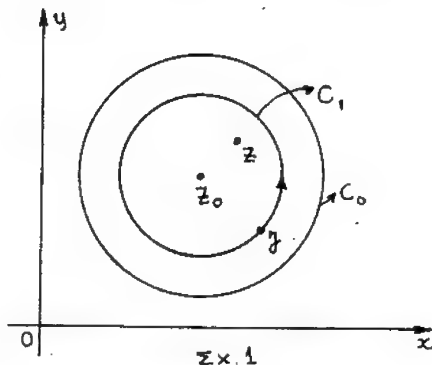
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots \quad (1)$$

Ἡ σχέση (1) ἐμφράζει ὅτι ἡ δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ συγκλίνει πρὸς τὴν συνάρτησιν $f(z)$, ὅταν $|z - z_0| < \tau_0$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα σημαίνει ὅτι ἡ $f(z)$ ἀναπτύσσεται εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Taylor περὶ τοῦ σημείου z_0 . Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ὅπου πάντες οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἔχομεν τὴν ἀντίστοιχον κατὰ Taylor ἀνάπτυξιν εἰς δυναμοσειρὰν μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ἓνα z ἐντὸς τοῦ κύκλου C_0 καὶ ἄς θέσωμεν $|z - z_0| = r$, ὅπου $r < \tau_0$ (βλ. Σχ. 1). Ἐστω η ἓνα σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς περιφέρειας C_1 ἑνὸς κύκλου κέντρου z_0 καὶ ἀκτίνος τ_1 , ταύτης, ὥστε: $r < \tau_1 < \tau_0$. Οὕτω $|\eta - z_0| = \tau_1$. Ἐπειδὴ τὸ z κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου C_1 καὶ ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τῆς περιφέρειας αὐτοῦ τοῦ κύκλου, ἔπεται, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy, ὅτι θὰ ἔχωμεν:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_1} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z}$$



όπου ο κύκλος C_1 θεωρείται διαγραφόμενος κατά την δεξιή φορά.

Έξ άλλου έχουμε:

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{(\eta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\eta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}}$$

Επίσης, εάν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός $\neq 1$, ως γνωστόν έχουμε:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1-w}$$

Οθεν,

$$\frac{1}{\eta - z} = \frac{1}{\eta - z_0} \cdot \left[1 + \frac{z - z_0}{\eta - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^{n-1} + \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^n \right]$$

και κατά συνέπεια:

$$\frac{f(z)}{\eta - z} = \frac{f(z)}{\eta - z_0} + \frac{f(z)}{(\eta - z_0)^2} (z - z_0) + \dots + \frac{f(z)}{(\eta - z_0)^n} (z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^n \cdot \frac{f(z)}{(\eta - z)(\eta - z_0)^n} \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας έναστον όρον της τελευταίας ισότητας κατά μήκος της περιφέρειας C_1 και διαιρούμεντες διὰ $2\pi i$ και γνωστού όντος ότι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z) dz}{(\eta - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

θα έχουμε:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + R_n(z) \quad (3)$$

$$\text{όπου } R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z) dz}{(\eta - z)(\eta - z_0)^n} \quad (4)$$

Υπενθυμίζομεν ότι: $|z - z_0| = r$ και $|\eta - z_0| = r_1$, ότε θα είναι:

$$|\eta - z| \geq |\eta - z_0| - |z - z_0| = r_1 - r.$$

Έντεϋθεν έπεται, από τον τύπον (4), εάν M παριστά την μεγίστην τιμήν της $f(z)$ επί της περιφέρειας C_1 , ότι:

$$|R_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi r_1}{(r_1 - r) r_1^n} = \frac{M r_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \quad (5)$$

Αλλά $r/r_1 < 1$, όθεν: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$

Οϋτω, διὰ καθε σημείον z έσωτερικόν του κύκλου C_0 , τό όριον, καθώς τό $n \uparrow \infty$, του άθροίσματος των n πρώτων όρων του δεξιού μέλους της ισότητας (3)

τείνει προς την συνάρτησιν $f(z)$. Συνεπώς δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z-z_0)^n, \text{ όταν } |z-z_0| < r_0 \quad (6)$$

Διά $z_0 = 0$ ή ανωτέρω σειρά ανάγεται εις σειράν του MacLaurin, ήτοι:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n, \text{ όταν } |z| < r_0 \quad (7)$$

Παρατήρησις: Εάν είναι γνωστόν ότι ή $f(z)$ είναι αναλυτική εις πάντα τὰ σημεία τὰ υείμενα εντός ενός κύκλου κέντρου z_0 , ή σύγκυλσις τής σειράς του Taylor περίε του σημείου z_0 προς την $f(z)$ διά υάθε z εντός του θεωρηθέντος κύκλου είναι εξασφαλισμένη υαί ούτω δέν απαιτείται κριτήριον διά νά διαπισώσωμεν την σύγκυλσιν τής σειράς.

Κατωτέρω δίδομεν μερικά παραδείγματα αναπτύξεως μίας αναλυτικής συναρτήσεως εις μίαν σειράν του MacLaurin ή Taylor.

- i) Έστω $f(z) = e^z$. Αύτη είναι αναλυτική διά υάθε $z \in \mathbb{C}$. Είναι όέ $f^{(n)}(z) = e^z$ υαί $f^{(n)}(0) = 1$. Όθεν,

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \text{ όταν } |z| < +\infty.$$

Κατά έναν ανάλογον τρόπον έχομεν:

ii) $\eta \mu z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \text{ όταν } |z| < +\infty$

iii) $\sigma \upsilon \nu z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \text{ όταν } |z| < +\infty$

iv) $\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \text{ όταν } |z| < +\infty$

v) $\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \text{ όταν } |z| < +\infty$

vi) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n, \text{ όταν } |z| < 1$

vii) $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^{2n}, \text{ όταν } |z| < 1.$

viii). $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$, όταν $|z-1| < 1$.

Απόδ: (viii) Έστω $f(z) = z^{-1}$ είναι $f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot n! \cdot z^{-n-1}$ και $f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor την ανωτέρω συνάρτηση περίε του σημείου $z=1$ έχουμε το ανωτέρω αποτέλεσμα.

ix) $\log z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(z-1)^n}{n} - \dots$ διά $|z-1| < 1$.

ή θέτοντες αντί z το $z+1$ έχουμε:

$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^n}{n} - \dots$ διά $|z| < 1$.

x) Διά κάθε μιγαδικόν αριθμόν a , ως γνωστόν, έχουμε $z^a = e^{a \cdot \log z}$. Όθεν

$$z^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} (z-1)^n, \text{ διά } |z-1| < 1$$

ή θέτοντες αντί z το $z+1$ έχουμε:

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1) \dots (a-n+1)}{n!} z^n, \text{ διά } |z| < 1.$$

xi) Διά κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z-2| < 2$ ισχύει:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n.$$

Λύσις: Έστω $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Τότε:

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Όθεν:

$$f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Έφ' όσον η $f(z)$ είναι αναλυτική διά όλα τα z με $|z-2| < 2$, έχουμε:

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{2^{n+2} n!} (z-2)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n,$$

δηλ. η δυναμοσειρά συγχλίνει προς την συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2}$, όταν $|z-2| < 2$.

§ 2. ΣΕΙΡΑΙ ΤΟΥ LAURENT

Ἡδὴ θὰ μελετήσωμεν σειρὰς τῶν ὁποίων ἔχομεν ἀρνητικὰς δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς z .

Θεώρημα VII-2-1. Ἐστω ἡ σειρὰ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ (1) καὶ ἔστω ὅτι $\ell = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_{-n}|}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

i) Ἐάν $\ell = 0$, τότε ἡ σειρὰ (1) συγκλίνει ἀπολύτως διὰ πάντα τὰ z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἐντός τοῦ σημείου $z = a$.

ii) Ἐάν $0 < \ell < \infty$, τότε ἡ σειρὰ (1) συγκλίνει ἀπολύτως διὰ πάντα τὰ z τὰ μείνεντα ἐντός τοῦ κύκλου $|z-a| = \ell$ καὶ ἀποκλίνει διὰ πάντα τὰ z τὰ μείνεντα ἐντός τοῦ κύκλου $|z-a| = \ell$.

iii) Ἐάν $\ell = \infty$, ἡ σειρὰ (1) ἀποκλίνει διὰ πᾶν $z (\neq \infty)$.

Ἀπόδειξις: Ἀς θέσωμεν: $\eta = \frac{1}{z-a}$, ὅτε ἡ σειρὰ (1) γίνεται: $\sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} \eta^n$ (1')

Ἡ αὐτὴ συγκλίσεως τῆς (1'), ὡς γνωστόν, εἶναι:

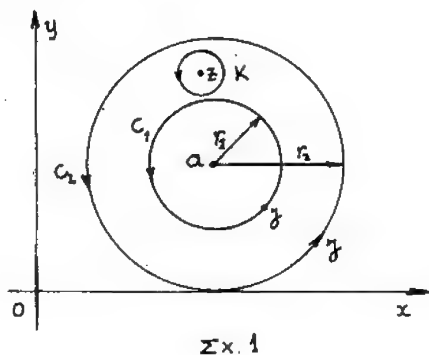
$$R' = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_{-n}|}} = \frac{1}{\ell} \quad (2)$$

Συνεπῶς ἡ (1) θὰ συγκλίνει διὰ αὐτὰ τὰ z ποὺ ἔχομεν:

$$\frac{1}{|z-a|} = |\eta| < \frac{1}{\ell} \quad \text{ἢ} \quad |z-a| > \ell, \quad \text{ἐξ οὗ τὸ συμπέρασμα.}$$

• Ἐστώσαν C_1 καὶ C_2 δύο ὁμόκεντροι κύκλοι μέ κέντρον τὸ σημεῖον a καὶ αὐτῖνας r_1 καὶ r_2 ἀντιστοίχως, ὅπου $0 < r_1 < r_2$ (βλ. Σχ.1) Ἡδὴ θὰ μελετήσωμεν μίαν συνάρτησιν $f(z)$, ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸν κυκλικὸν δακτύλιον $D: r_1 < |z-a| < r_2$.

Ἐνας τοιοῦτος δακτύλιος εἶναι ἕνα χωρίον οὐχὶ ἀπλῶς συνεκτικόν καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ Cauchy. Ἰσχύει σχετικῶς τὸ κατωθι Θεώρημα τοῦ Laurent.



1) Με $\frac{1}{\ell}$ συμβολίζομεν ἐπίσης τὸ 0 διὰ $\ell = +\infty$ καὶ τὸ $+\infty$ διὰ $\ell = 0$

Θεώρημα VII- 2-2. Έάν ή $f(z)$ είναι αναλυτική εντός του κυκλικού δαυτ-
λίου D , τότε διά υάθε σημείον z αὐτοῦ τοῦ δαυτλίου ή $f(z)$ ἔχει τό υάτωδι
ανάπτυγμα :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} \quad (1)$$

ὅπου

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta-a)^{n+1}} \quad (2), \quad n=0,1,2,3,\dots$$

υαί

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\eta) (\eta-a)^{n-1} d\eta \quad (3)$$

ή δέ φορά διαγραφῆς τῶν C_1 υαί C_2 είναι ή ὁρισθεῖσα ὡς θετιυή.

Ἡ σειρά (1) δύναται νά γραφῇ υαί ὡς ἑξῆς :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (4) \quad (r_1 < |z-a| < r_2).$$

ὅπου

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\eta) d\eta}{(\eta-a)^{n+1}}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

υαί ὡς C λαμβάνεται ή C_2 ή C_1 , ἔάν τό η είναι θετιυό ή ἄρνητιυό ἀντιστοιχῶς.

Ἡ σειρά (4) ή ὁποία ἔχυλῆει θετιυάς υαί ἄρνητιυάς δυνάμεις τοῦ $(z-a)$ υα-
λεῖται σειρά τοῦ Laurent υαί δά είναι συχυλίνουσα, ἔάν ἀμφότεροι αἱ σειραί
 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ υαί $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ συχυλίνουν.

Ἐξ αὐτῶν δέ ή πρώτη υαλεῖται υανονιυόν μέρος τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent, ἔ-
νῶ ή δευτέρα υαλεῖται πρωτεῦον μέρος τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent.

Παρατήρησις : Ἐάν ή συνάρτησις $f(z)$ είναι αναλυτική εἰς υάθε σημείον υεί-
μενον εντός τῆς C_2 υαί ἐπ' αὐτῆς ἔχαιρουμένου τοῦ σημείου $z=a$, τότε ή ἀκτίς
 r_1 δύναται νά ληφῇ ὅσονδῆποτε μιυρή υαί ὡς ἐν τούτου ή ἔυφρασις (1) ἱσχύ-
ει διά $0 < |z-a| < r_2$.

Ἐάν ή $f(z)$ είναι αναλυτική εἰς πάντα τά σημεία τά υείμενα εντός υαί ἐπὶ τῆς
 C_2 , τότε ή συνάρτησις $f(z) \cdot (z-a)^{n-1}$ είναι αναλυτική εντός υαί ἐπὶ τῆς C_1 , ἔπειδῆ $n \geq 1$ υαί ὡς
ἐν τούτου τά ὁλουθηρώματα (β) τά δίδοντα τούς C_{-n} είναι πάντα μηδέν. Οὕτω ή ἔυφρασις
(1) ἀνάγεται εἰς μίαν σειράν τοῦ Taylor.

Απόδειξις (του θεωρήματος). Εάν z είναι ένα σημείον υείμενον ἐντός τοῦ κυκλίου δαυτηλίου D , θεωροῦμεν περὶ αὐτοῦ ἕναν κύκλον K υείμενον ἐντός τοῦ δαυτηλίου D καὶ θετικῶς προσανατολισμένον (βλ. Σχ. 1). Ἐπειδὴ ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ κυκλικὸν χωρίον τοῦ ὁποίου τὸ ἑσωτερικὸν τοῦ εἶναι ἕνα πολλαπλῶς συνευτιμὸν πεδίων, τότε συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VII-2-2, θὰ ἔχωμεν.

$$\int_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \int_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 0 \quad (1)$$

Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ Cauchy ἡ τιμὴ τοῦ τρίτου ὁλοκληρώματος εἶναι $2\pi i f(z)$. Ὅθεν, ἡ (1) γράφεται:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (2)$$

Διὰ τὸ πρῶτον ὁλοκληρῶμα (βλ. ἀπόδειξιν θεωρήματος VII-1-1) θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} (z - a) + \dots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^n} \cdot (z - a)^{n-1} + (z - a)^n \cdot \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - a)^n}$$

Διὰ δὲ τὸ δεῦτερον ὁλοκληρῶμα παρατηροῦμεν ὅτι:

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta - a)/(z - a)}$$

Καὶ οὕτω ἐπιτυγχάνομεν:

$$-\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(\zeta) \cdot \frac{1}{z - a} + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} \cdot \frac{1}{(z - a)^2} + \dots + \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(z - a)^n} + \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{(\zeta - a)^n f(\zeta)}{z - \zeta}$$

Οὕτω ἐκ τῆς σχέσεως (2) ἔπεται ὅτι:

$$f(z) = C_1 + C_2 (z - a) + \dots + C_{n-1} (z - a)^{n-1} + R_n(z) + \frac{C_{-1}}{z - a} + \frac{C_{-2}}{(z - a)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z - a)^n} + Q_n(z), \text{ ὅπου}$$

Τὰ $R_n(z)$ καὶ $Q_n(z)$ παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$R_n(z) = \frac{(z - a)^n}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)^n}$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi i (z - a)^n} \int_{C_1} \frac{(\zeta - a)^n f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}$$

Ἐστω $r = |z - a|$, ὅπου $r_1 < r < r_2$. Εάν M εἶναι τὸ μέγιστον τῆς $|f(\zeta)|$ ἐπὶ τῆς

περιφερείας C_2 , τότε ως γνωστόν θά ἔχωμεν:

$$|R_n(z)| \leq \frac{r_2^n}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi r_1}{(r_2 - r_1)r_1^n} = \frac{M \cdot r_1}{r_2 - r_1} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n.$$

ἀλλὰ $\frac{r_1}{r_2} < 1$ καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0$$

Κατ' ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$|Q_n(z)| \leq \frac{M \cdot r_1}{r_2 - r_1} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$$

εἶναι δὲ $\frac{r_1}{r_2} < 1$ καὶ ὡς ἐκ τούτου

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z) = 0$$

οὕτω ἐδείχθη τὸ θεώρημα τοῦ Laurent.

• Παραδείγματα 1στ' Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ ἔχει τὸ κατωθὶ κατὰ Laurent ἀνάπτυγμα:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

ὅπου τὸ z εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ δαυτυλίου $0 < |z| < 1$.

Ὁμοίως ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἔχει τὸ κατωθὶ κατὰ Laurent ἀνάπτυγμα:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{1+(z-1)} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n,$$

ὅπου τὸ z εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ δαυτυλίου $0 < |z-1| < 1$.

• 2στ' Ἡ συνάρτησις $f(z) = e^{1/z}$ ἔχει τὸ κατωθὶ κατὰ Laurent ἀνάπτυγμα:

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

ὅπου εἶναι $|z| > 0$.

3στ' Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ ἐντός τῶν δύο σημείων $z=1$ καὶ $z=2$. Ζητεῖται νὰ ἀναπτυχθῇ αὕτη εἰς σειρὰν Laurent εἰς τὰς κατωθὶ περιπτώσεις: i) Ὃταν $|z| < 1$, ii) Ὃταν $1 < |z| < 2$, iii) Ὃταν $|z| > 2$.

Λύσις: i) Θεωροῦμεν τὰ z τὰ εὐρισκόμενα ἐντὸς τοῦ δαυτυλίου $|z| < 1$. Ἐξ

αὐτοῦ δὲ ἔπεται ὅτι $|\frac{z}{2}| < 1$.

Θὰ ἔχωμεν ὁθεν:

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n - z^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 1) z^n$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἀναπτύσσεται εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Taylor διὰ πᾶθε z εὐρισκόμενον ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z| < 1$. Τέλος εὐνόλως διαπιστοῦται ὅτι: $f^{(n)}(0) = n! (2^{-n-1} - 1)$.

ii) Ἐστω ὅτι τὸ z εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ δαυτυλίου $1 < |z| < 2$. Ἐντὸς αὐτοῦ τοῦ δαυτυλίου θὰ ἔχωμεν: $|\frac{1}{z}| < 1$ καὶ $|\frac{z}{2}| < 1$.

$$\text{Ὅθεν, } f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι διὰ τὰ z εὐρισκόμενα ἐντὸς τοῦ ἀνωτέρω δαυτυλίου ἡ $f(z)$ ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν τοῦ Laurent.

iii) Ἐστω ὅτι τὰ z εὐρίσκονται εἰς τὸ πεδίου $|z| > 2$.

Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι: $|\frac{1}{z}| < 1$ καὶ $|\frac{z}{2}| < 1$.

$$\text{Ὅθεν, } f(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^{-n}}{z^{n+1}}$$

Ἦτοι, ἡ $f(z)$ καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἀναπτύσσεται εἰς σειρὰν τοῦ Laurent.

§3. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕΜΟΝΩΜΕΝΩΝ ΙΔΙΑΖΟΝΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΜΙΑΣ ΜΟΝΟΤΙΜΟΥ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἐστω τὸ σημεῖον a ($a \neq \infty$) καὶ ἡ μονότιμος ἀναλυτικὴ συνάρτησις $f(z)$ ὠρισμένη εἰς πᾶθε σημεῖον ὑποκρίσεως τοῦ a ἐντὸς τοῦ σημείου a . Ὡς γνωστὸν τὸ a τὸ καλοῦμεν μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον τῆς $f(z)$. Προτιθέμεθα νὰ μελετήσωμεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς $f(z)$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=a$.

Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VII - 2-2 ἡ $f(z)$ ἔχει τὸ πᾶνωδι κατὰ Laurent ἀνάπτυγμα:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n \quad (1)$$

Συμφώνως πρὸς τὸ ἀνάπτυγμα (1) τρεῖς διαφορετικαὶ περιπτώσεις εἶναι δυναταί.

1%/ Ἡ σειρά (1) νά μή περιέχῃ ἀρνητιῆς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$.

2%/ Ἡ σειρά (1) περιέχει ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν ὅρων μέ ἀρνητιῆς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$.

3%/ Ἡ σειρά (1) περιέχει ἀπείρους ἀρνητιῆς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$.

Ἡδὴ δὲ μελετήσωμεν χωριστὰ ἐκάστην τῶν ἀνωτέρω τριῶν περιπτώσεων.

1%/ Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσηιν θά ἔχωμεν τὸ αὐόλουδον ἀνάπτυγμα:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$. Εὐνόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τοῦ $z \rightarrow a$, ἡ $f(z)$ ἔχει μίαν ὁριαυὴν τιμὴν καὶ ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς C_0 . Ἐὰν ἡ $f(z)$ δὲν ἔχη ὁρισθῇ εἰς τὴν θέσιν $z=a$, τότε ὀρίδομεν ταύτην εἰς τὸ ἀνωτέρω σημεῖον θέτοντες $f(a) = C_0$. Εἰς τὴν περίπτωσηιν ὅπου ἡ ἀρχικῶς ἀποδοθεῖσα τιμὴ τῆς $f(z)$ διὰ $z=a$ δὲν εἶναι ἴση πρὸς C_0 , τότε ὀρίδομεν ἐκ νέου τὴν τιμὴν τῆς $f(z)$ διὰ $z=a$ θέτοντες $f(z) = C_0$. Οὕτω ἡ $f(z)$ θά εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z-a| < r_2$. Συνεπῶς ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν ἄρσιν (διόρθωσιν) τῆς ἀνωμαλίας τῆς $f(z)$ εἰς τὸ σημεῖον $z=a$. Ὅθεν, εἰς ἕνα μεμονωμένον ἰδιόσον σημεῖον $z=a$ τῆς $f(z)$ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ἀνάπτυγμα τῆς $f(z)$ εἰς μίαν σειράν τοῦ Laurent δὲν περιέχει ἀρνητιῆς δυνάμεις τῆς διαφορᾶς $(z-a)$, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν ἄρσιν τῆς ἀνωμαλίας.

Παράδειγμα: Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{z - \eta \mu z}{z^3}$, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σημεῖον $z=0$ ἰδιόσον. Νὰ ἀναπτυχθῇ εἰς σειράν τοῦ Laurent καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ δαυτύλιος συγυλίσσεως ταύτης.

Λύσις: Ἐχομεν:
$$\frac{z - \eta \mu z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \left\{ z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{z^3} \left\{ \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \dots \right\} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots$$

Εἰς τὸ σημεῖον $z=0$ ἐπιτυχάνομεν ἄρσιν τῆς ἀνωμαλίας θέτοντες: $f(0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Ἡ ἀνωτέρω σειρά συγυλίνει προφανῶς διὰ καθε $z \in \mathbb{C}$.

2%/ Ἡ σειρά τοῦ Laurent τῆς συναρτήσεως $f(z)$ πέριξ τοῦ μεμονωμένου ἰδιόσοντος σημείου $z=a$ περιέχει ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν m ὅρων ἔχόντων ἀρνητιῆς δυνάμεις τοῦ $(z-a)$, μέ ἄλλους λόγους ἡ σειρά (1) εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z-a)^n.$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ σημεῖον $z=a$ εἶναι ἕνας πόλος τᾶξεως m τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Πράγματι ἔχομεν ἐν προκειμένῳ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n + \frac{C_{-1}}{z-a} + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} \quad (2),$$

ὅπου $C_{-m} \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ $(z-a)^m$ λαμβάνομεν:

$$(z-a)^m \cdot f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^{n+m} + C_{-1}(z-a)^{m-1} + C_{-2}(z-a)^{m-2} + \dots + C_{-m}, \quad (3)$$

ὅπου τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (3) εἶναι μία συνήθης δυναμοσειρά καὶ τῆς ὁποίας ὁ σταθερὸς ὅρος εἶναι ὁ $C_{-m} (\neq 0)$. Συνεπῶς εἰς τὸ σημεῖον $z=a$ αἶρεται ἡ ἀνωμαλία τῆς συναρτήσεως $(z-a)^m \cdot f(z)$. Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m \cdot f(z) = C_{-m} \neq 0.$$

καὶ κατὰ συνέπειαν:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} = \infty$$

Συνεπῶς τὸ $z=a$ εἶναι πόλος τῆς συναρτήσεως $f(z)$ τᾶξεως m .

• Παράδειγμα: Νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ Laurent ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ περὶ τοῦ ἰδιόζοντος σημείου $z=1$ αὐτῆς. Ἐξετάσατε τὸ εἶδος τοῦ σημείου τούτου.

Λύσις: Θέτομεν $z-1=u$, ὅτε $z=1+u$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3} \cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3} \cdot \left\{ 1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots \right\} = \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3} (z-1) + \dots \end{aligned}$$

Οὕτω τὸ σημεῖον $z=1$ εἶναι ἕνας πόλος τᾶξεως $m=3$.

39/. Ἡ σειρά τῶν Laurent τῆς συναρτήσεως $f(z)$ περὶ τοῦ μεμονωμένου ἰδιόζοντος σημείου $z=a$ ἐγκυβεῖ ἕναν ἀπείρου ἀριθμὸν ἀρνητικῶν δυνάμεων τῆς διαφορᾶς $(z-a)$, δηλ. εἶναι τῆς μορφῆς:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ σημεῖον $z=a$ εἶναι ἕνα οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον τῆς συναρτήσεως $f(z)$.

Παράδειγμα 19%. Η συνάρτησις $f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots$ έχει τό σημείον $z=0$ ούσιώδες άνώμαλον σημείον.

20%. Έστω ή συνάρτησις $f(z) = (z-3) \eta \mu \frac{1}{z+2}$. Νά εύρεθ ή σειρά του Laurent ταύτης περίξ του ιδιάσοντος σημείου $z=-2$.

Λύσις: Έστω $z+2=u$, ότε $z=u-2$. Η δοθείσα συνάρτησις γράφεται:

$$\begin{aligned} (z-3) \eta \mu \frac{1}{z+2} &= (u-5) \eta \mu \frac{1}{u} = (u-5) \cdot \left\{ \frac{1}{u} - \frac{1}{3! u^3} + \frac{1}{5! u^5} - \dots \right\} = \\ &= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3! u^3} + \frac{5}{3! u^3} + \frac{1}{5! u^5} - \dots \\ &= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} + \dots \end{aligned}$$

Ούτω τό σημείον $z=-2$ είναι ένα ούσιώδες άνώμαλον σημείον τής συναρτήσεως. Η άνωτέρω σειρά συγχλίνει διά υάδε $z \neq -2$.

§4. ΟΜΑΛΗ ΣΥΓΚΛΗΣΙΣ ΣΕΙΡΩΝ

Ηδόν θά μελετήσωμεν τās συναρτησιακάς σειράς, των οποίων οί όροι είναι συναρτήσεις μιās μιγαδιυής μεταβλητής.

Ας θεωρήσωμεν τήν άμολουδιάν των μονοτίμων μιγαδιυών συναρτήσεων $\{f_n(z)\}$, $n \geq 1$ τής μιγαδιυής μεταβλητής z ώρισμένων εις ένα πεδίον G και έξ αύτης τής άμολουδιās άς σχηματίσωμεν τήν σειράν των συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ (1). Διά υάδε σταθερόν $z_0 \in G$ ή σειρά (1) μετατρέπεται εις μίαν σειράν μιγαδιυών αριθμών. Η σειρά (1) θά λέγωμεν ότι συγχλίνει έν G , εάν διά υάδε $z \in G$ ή αντίστοιχος άριθμητιυή σειρά συγχλίνει.

Εάν ή σειρά (1) συγχλίνη έν G , τότε εις αυτό τό πεδίον G δυνάμεθα νά όρίσωμεν μίαν μονότιμον συνάρτησιν $S(z)$, τής οποίας ή τιμή διά υάδε $z \in G$ ίσοῦται πρός τόν άριθμόν πρός τόν όποϊον συγχλίνει ή αντίστοιχος άριθμητιυή σειρά. Αύτή ή συνάρτησις $S(z)$ καλεϊται άθροισμα τής σειράς (1) έντός του πεδίου G .

Ούτω, συμφώνως πρός τ' άνωτέρω, διά υάδε $z \in G$ και διά υάδε $\varepsilon > 0$ ύπάρχει ένας θετιμός άιέρας $N(z, \varepsilon)$ τοιοῦτος, ώστε νά έχωμεν:

$$\left| S(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \varepsilon \quad (2) \quad \text{διά} \quad n \geq N(\varepsilon, z) \quad \eta$$

$$\left| S(z) - S_n(z) \right| < \varepsilon \quad (2') \quad \text{διά} \quad n \geq N(\varepsilon, z),$$

όπου $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$, δηλ. τό άθροισμα τών η πρώτων όρων τής σειράς.

Παρατηρούμεν λοιπόν ότι ό αριθμός N έξαρτάται ούχι μόνον έυ του ϵ , αλλά και έυ του σημείου z . Όπως διά τās πραγματιυάς συναρτήσεις, ούτω και διά τās μιγαδικάς, είναι άπαραίτητον νά εισαγάγωμεν τήν έννοιαν τής όμαλῆς συγυλίσσεως και νά αναφέρωμεν έν συντομία τά βασικά θεωρήματα τά άφορώντα ταύτην. Η έννοια αύτη παίσει έναν σημαντιυόν ρόλον εις τήν θεωρίαν τών σειρών τών αναλυτιυών συναρτήσεων.

Όρισμός VII-4-1. Έστω ότι $S_n(z)$ είναι τό άθροισμα τών η πρώτων όρων τής σειράς (1), ή όποία συγυλίνει πρός τήν συνάρτησιν $S(z)$ (άθροισμα) διά υάδε $z \in G$. Θα λέγωμεν ότι ή σειρά (1) συγυλίνει όμαλῶς έν G , εάν διά υάδε $\epsilon > 0$ ύπάρχη ένας θετιυός άιέραιος $N = N(\epsilon) > 0$ (άνεξάρτητος του z) τοιούτος, ώστε νά έχωμεν: $|S_n(z) - S(z)| < \epsilon$ (3) διά $n \geq N(\epsilon)$ και διά υάδε $z \in G$.

Θέτοντες $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$ ή συνθήκη (3) τής όμαλῆς συγυλίσσεως ισοδυναμεί μέ τό νά έχωμεν: $|R_n(z)| < \epsilon$ (3') διά $n \geq N(\epsilon)$.

Παραθέτομεν υατωτέρω μερικά βασικά θεωρήματα όμαλῆς συγυλίσσεως.

Θεώρημα VII-4-1. Έάν ή σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ συγυλίνει όμαλῶς έν G και εάν έυαστος όρος ταύτης είναι συνεχής συνάρτησις εις τό σημείο $z_0 \in G$, τότε και τό άθροισμα $S(z)$ τής σειράς είναι επίσης συνεχής συνάρτησις εις τό σημείο z_0 .

Η άπόδειξις είναι ανάλογος πρός τήν έυτεθεϊσαν εις τόν Πρώτον Τόμον Πόρισμα XVIII-3-1 διά πραγματιυάς συναρτήσεις.

Μία άμεσως συνέπεια του άνωτέρω θεωρήματος είναι, ότι τό άθροισμα μιās όμαλῶς συγυλινούσης σειράς συνεχών συναρτήσεων έντός του G είναι όμοίως συνεχής συνάρτησις έντός του G . (Έπειδή συνέχεια έντός του G σημαίνει συνέχεια εις υάδε σημείον του G).

Θεώρημα VII-4-2. (Κριτήριον Weierstrass). Υποθέτομεν ότι οι όροι τής σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ ιυανοποιούν τήν άνισότητα $|f_k(z)| \leq a_k$, $k=1,2,3,\dots$ διά υάδε $z \in G$ και ότι ή αριθμητιυή σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγυλίνει. Τότε ή δοθεϊσα σειρά συγυλίνει όμαλῶς έντός του G .

Απόδειξις: Έξ υποθέσεως έχουμε:

$$|f_k(z)| \leq a_k \text{ διά } z \in G.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγχλίνει εξ υποθέσεως, έπεται ότι διά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας θετικός άμεραιος $N > 0$ τοιοῦτος, ώστε να έχουμε $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$ διά $n \geq N$.

Εξ άλλου έχουμε την ανισότητα:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon, \text{ διά } n \geq N$$

Τό τελευταίον συμπέρασμα αποδεικνύει τό θεώρημα.

Εφαρμογή: θεωρούμεν την σειράν: $z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) + \dots$

Της άνωτέρω σειράς τό $S_n(z) = z^n$. Προφανώς η ακολουθία $\{z^n\}$, $n \geq 1$, συνεπώς και η σειρά, συγχλίνουν έντός του δίσκου $|z| < 1$ και έξαιρετικώς και εις τό σημείον $z=1$ και άπουλίνει διά $|z| \geq 1$ έξτός του σημείου $z=1$, όπου συγχλίνει. Τό άρροισμα της σειράς θά είναι:

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{έν } |z| < 1 \\ 1, & \text{» } z = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμεν λοιπόν ότι, η άνωτέρω συνάρτησις $f(z)$ δέν είναι συνεχής εις τό σύνολον $G = \{z: |z| < 1 \text{ και } z=1\}$.

Τήν άνωτέρω σειράν την γράφωμεν οὔτω:

$$\begin{aligned} & 1 + (z-1) + (z^2-z) + \dots + (z^n - z^{n-1}) + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n - z^{n-1}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \text{ όπου } f_n(z) = z^n - z^{n-1} \end{aligned}$$

Άς εξέτάσωμεν την όμαλήν σύγχλυσιν της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Έχομεν: $|f_n(z)| = |z^n - z^{n-1}| = |z^{n-1}| \cdot |z-1|$ και έντεῦθεν.

$$|f_n(z)| \leq r^{n-1} \cdot (r+1), \text{ όπου } |z| \leq r$$

$$\text{Είναι όμως } \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cdot (r+1) = (r+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$$

Ἡ τελευταία ἀριθμητικὴ σειρά συγχλίνει διὰ $r < 1$.

Συμφώνως δὲ πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα καὶ ἡ δοθεῖσα σειρά συγχλίνει ὁμαλῶς εἰς τὴν αὐτὴν ἀντιστοιχίαν $|z| \leq r < 1$.

Θεώρημα VII-4-3. Ἐάν ἡ σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ (1) τῶν συνεχῶν συναρτήσεων $f_k(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς πρὸς τὴν συνάρτησιν $S(z)$ ἐντὸς τοῦ πεδίου G , τότε τὸ ὅλουλήρωμα αὐτῆς τῆς συναρτήσεως κατὰ μήκος μιᾶς τμηματικῆς λείας καμπύλης C , καὶ μάλιστα ἐξ ὁλουλήρου ἐντὸς τοῦ G δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ὁλοκληροῦντες ἕνα στον ὅρον τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς κατὰ μήκος τῆς C , δηλ.

$$\int_C S(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ σειρά (1) συγχλίνει ὁμαλῶς, τότε διὰ τῆς G ὑπάρχει ἓνας ἀριθμὸς N τοιοῦτος, ὥστε διὰ τῆς αὐτῆς $\varepsilon > 0$ νὰ ἔχωμεν:

$$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{L} \quad \text{διὰ } n \geq N(\varepsilon) \equiv N,$$

ὅπου L εἶναι τὸ μήκος τῆς καμπύλης C . Τότε:

$$\left| \int_C S(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_C f_k(z) dz \right| = \left| \int_C \left\{ S(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right\} dz \right| = \left| \int_C R_n(z) dz \right| \leq \int_C |R_n(z)| dz \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Ὁδυν,

$$\int_C S(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz.$$

Θεώρημα VII-4-4. (Weierstrass). Ἐστωσαν αἱ συναρτήσεις $f_n(z)$ διὰ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι ἀναλυτικαὶ ἐντὸς τοῦ πεδίου G καὶ ἔστω ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς πρὸς τὴν συνάρτησιν $S(z)$ εἰς τὴν αὐτὴν ἀντιστοιχίαν ὑπό-πεδίου G' τοῦ G . Τότε ἰσχύουν τὰ κατωθί:

1^η/ Ἡ $S(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τοῦ πεδίου G .

2^η/ $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$

3^η/ Ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς εἰς τὴν αὐτὴν ἀντιστοιχίαν ὑπό-πεδίου G' τοῦ G .

Ἀπόδειξις: 1^η./ Ἐστω ἓνα τυχόν ἑσωτερικόν σημεῖον $z_0 \in G$ καὶ ἐν συνεχείᾳ να-
τασχευάσωμεν ἓνα ἀπλό συνευτιμὸν ὑπό-πεδίου G' τοῦ G περιέχον τὸ σημεῖον z_0 .
Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VII-4-1, ἡ $S(z)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις ἐντὸς τοῦ
 G . θεωροῦμεν τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς $S(z)$ κατὰ μῆκος μιᾶς αὐθαίρετου υἱει-
στής καμπύλης C υειμένης ἐξ ὁλοκληρώου ἐντὸς τοῦ πεδίου G' . Συμφώνως δέ
πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν:

$$\int_C S(\eta) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(\eta) d\eta = 0 \quad (1),$$

καθ' ὅτι, αἱ $f_n(z)$ εἶναι ἀναλυτικαὶ ἐντὸς τοῦ G καὶ συμφώνως πρὸς τὸ θεώρη-
μα τοῦ Cauchy θὰ ἔχωμεν $\int_C f_n(\eta) d\eta = 0$. Συμφώνως δέ πρὸς τὸ θεώρημα

VII-4-2 (Morera) ἡ $S(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς μίαν περιοχὴν G' τοῦ σημείου z_0 .
Ἐπειδὴ ἡ ἐπιλογὴ τοῦ σημείου z_0 εἶναι αὐθαίρετος, ἡ $S(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐν-
τὸς τοῦ G .

2^η./ Ἐστω ἓνα αὐθαίρετον (σταθερόν) σημεῖον $z_0 \in G$. Ἐυλέγομεν μίαν αὐθαί-
ρετον υἱειστήν καμπύλην C υειμένην ἐξ ὁλοκληρώου ἐντὸς ἑνὸς ὑπό-πεδίου G'
καὶ περιέχουσα (ἢ C) τὸ σημεῖον z_0 . Ἐπειδὴ,

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad (2)$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \quad (3)$$

Διὰ τὴν σειρὰν (3) παρατηροῦμεν ὅτι, λόγῳ τῶν ὑποθέσεων τοῦ θεωρήματος, αὐ-
τὴ συγχλίνει ὁμαλῶς ἐπὶ τῆς C . Ὅθεν, ὁλοκληροῦντες κατὰ ὅρους τὴν σειρὰν (3)
κατὰ μῆκος τῆς C καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόζοντες τὸν ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ
Cauchy, λαμβάνομεν:

$$\int_C \frac{S(\eta) d\eta}{(\eta-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C \frac{f_n(\eta) d\eta}{(\eta-z_0)^{k+1}} \quad \text{ἢ}$$

$$S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0) \quad (4)$$

Ἐπειδὴ δέ τὸ z_0 εἶναι αὐθαίρετον σημεῖον τοῦ G , τὸ δεύτερον μέρος τοῦ θεω-

ρήματος ἀπεδείχθη.

39/. Ἡδὴ θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς εἰς τὰδε ὑλειτουργόν ὑπό-πεδίων \bar{G}' τοῦ G . Ἐστω γ_{z_0} μία περιφέρεια αὐτίνος R καὶ κέντρου z_0 καὶ ἔστω K_{z_0} ὁ ἀνοιχτός δίσκος κέντρου z_0 καὶ αὐτίνος $1/2 R$. Ἐπειδὴ ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς ἐπὶ τῆς γ_{z_0} , ὑπάρχει ἕνας ἀέριαιος $N_{z_0} = N_{z_0}(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος ὥστε, νὰ ἔχωμεν:

$$|S_n(\eta) - S(\eta)| < \varepsilon \quad (5)$$

δι' ὅλα τὰ $n \geq N_{z_0}$ καὶ ὅλα τὰ $\eta \in \gamma_{z_0}$.

Ἐν τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{f_1(\eta) d\eta}{(\eta-z)^{k+1}} + \dots + \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{f_n(\eta) d\eta}{(\eta-z)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{S(\eta) d\eta}{(\eta-z)^{k+1}} \right| = \\ & = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{S_n(\eta) - S(\eta) d\eta}{(\eta-z)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{|S_n(\eta) - S(\eta)| d\eta}{|\eta-z|^{k+1}} \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{(R/2)^{k+1}} \cdot 2\pi R \quad (6), \end{aligned}$$

δι' ὅλα τὰ $n \geq N_{z_0}$ καὶ ὅλα τὰ $z \in K_{z_0}$.

Ἐφαρμόζοντες δὲ τὸν τύπον τοῦ Cauchy τὸ ἀριστερόν μέλος (6) γίνεται:

$$\left| f_1^{(k)}(z) + \dots + f_n^{(k)}(z) - S^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k! \cdot 2^{k+1}}{R^k} \cdot \varepsilon \quad (7)$$

διὰ $n \geq N_{z_0}$ καὶ $z \in K_{z_0}$.

Ἐν τῆς (7) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ δίσκου K_{z_0} .

Συμφάνως δὲ πρὸς τὸ θεώρημα τῆς καλύψεως τῶν Heine - Borel (βλ. θεώρημα I-1-2) τὸ ὑλειτουργόν καὶ φραγμένον χωρίον \bar{G}' δύνανται νὰ καλυφθῇ ὑπὸ ἑνὸς πεπερασμένου ἀριθμοῦ δίσκων K_{z_0} ($z_0 \in G$), ἔστω τῶν $K_{z_1}, K_{z_2}, \dots, K_{z_n}$. Ἐυλεῖστον ἐν συνεχείᾳ ὡς $N = \max \{N_{z_1}, N_{z_2}, \dots, N_{z_n}\}$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνισότης (7) θὰ ἰσχύῃ δι' ὅλα τὰ $n \geq N$ καὶ διὰ κάθε $z \in \bar{G}'$, δηλ. ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ συγχλίνει ὁμαλῶς ἐντός τοῦ \bar{G}' .

• Τὰ ἀνωτέρω θεωρήματα δυνάμεθα προφανῶς νὰ τὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν εἰδιυῆν περίπτωσιν τῶν δυναμοσειρῶν. Σχετικῶς ἰσχύουν τ' αὐτόλουθα διὰ τὴν δυναμοσειράν:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (1)$$

Θεώρημα VII-4-5. 'Εάν ἡ δυναμοσειρά (1) ἔχη ἀντίστροφης R , τότε ἡ (1) συγκλίνει ὁμαλῶς (καί ἀπολύτως) εἰς τὴν αὐτὴν ὑπερσφαιρὴν $|z| \leq r < R$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $|z| \leq r$ δὲ ἔχουμεν καὶ $|C_n z^n| = |C_n| \cdot |z|^n \leq |C_n| \cdot r^n$. Ἀλλὰ ἡ ἀριθμητικὴ σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \cdot r^n$ συγκλίνει καὶ ὡς ἐν τούτῳ κατὰ τὸ κριτήριον τοῦ Weierstrass καὶ ἡ δοθεῖσα σειρά δὲ συγκλίνει ὁμαλῶς καὶ ἀπολύτως ἐν τῷ χωρίῳ $|z| \leq r < R$.

Θεώρημα VII-4-6. Τὸ ἄθροισμα $S(z)$ τῆς δυναμοσειρᾶς (1) μέ ἀντίστροφης R εἶναι συνεχὴς συνάρτησις ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z| < R$.

Ἀπόδειξις: Ἐν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καὶ τοῦ θεωρήματος VII-4-1 ἐπεταί ὅτι ἡ συνάρτησις $S(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν αὐτὴν ὑπερσφαιρὴν $|z| \leq r < R$. Ἐντεῦθεν ἡ $S(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸν ἀνοιχτὸν δίσκον $|z| < R$.

Θεώρημα VII-4-7. Ἐστω ἡ δυναμοσειρά (1) μέ ἀντίστροφης R καὶ ἔστω $S(z)$ τὸ ἄθροισμα ταύτης, τότε:

i) Ἡ συνάρτησις $S(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z| < R$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει:

$$S'(z) = C_1 + 2C_2 z + 3C_3 z^2 + \dots + n C_n z^{n-1} + \dots$$

δηλ. ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος τῆς δυναμοσειρᾶς εὐρίσκεται, ἐὰν παραγωγίσωμεν ἕνα σὺν ὅρον τῆς δυναμοσειρᾶς καὶ ἡ νέα δυναμοσειρά ἔχει πάλιν ἀκτῖνα συγκλίνουσας R .

ii) Τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς $S(z)$ κατὰ μήκος μιᾶς ὑπερσφαιρᾶς C κλειμένης ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z| < R$ εὐρίσκεται, ἐὰν ὁλοκληρώσωμεν ἕνα σὺν ὅρον τῆς δυναμοσειρᾶς κατὰ μήκος τῆς ἰδίας ὑπερσφαιρᾶς.

§ 5. ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΣ

Κατ' ἀρχάς δὲ ἐξετάσωμεν πῶς ἡ συμπεριφορὰ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως εἰς ἕνα πεδίου προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν συμπεριφορὰν αὐτῆς εἰς ἕνα μικρόν σύνολον περιεχόμενον εἰς αὐτὸ τὸ πεδίου. Μὲ ἄλλους λόγους δὲ θεωρήσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως. πρὸς τούτοις θεωροῦμεν ἀναγκαῖον ν' ἀποδείξωμεν τὸ κατωθί:

Θεώρημα VII-5-1. Υποθέτομεν ότι η συνάρτησις $f(z)$ είναι αναλυτική εις ένα σημείον z_0 , το όποιον είναι μηδενίδιον αυτής. Τότε υπάρχει μία περιοχή του z_0 εντός της οποίας η $f(z)$ δεν έχει άλλα μηδενίσοντα, εϋτός εάν η $f(z)$ είναι εν ταυτότητος μηδέν. Το ανωτέρω συμπέρασμα σημαίνει ότι τα μηδενίσοντα σημεία της $f(z)$ είναι μεμονωμένα σημεία.

Απόδειξις: Έφ' όσον η $f(z)$ είναι αναλυτική εις τό z_0 αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας κύβλος κέντρου z_0 και ακτίνας r_0 εις τό εσωτερικόν του οποίου η $f(z)$ έχει τό υάτωδι κατά Taylor ανάπτυγμα.

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ όπου } |z-z_0| < r_0 \quad (1),$$

είναι δέ $a_0 = f(z)$ και $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Εάν τό z_0 είναι μηδενίδιον της $f(z)$, τότε $a_0 = 0$. Εάν δέ συμβῇ επί πλέον και είναι $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ ενώ $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, τότε ό τύπος (1) γράφεται:

$$f(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-z_0)^n, \quad a_m \neq 0 \quad (2),$$

μέ άλλους λόγους εις αυτήν την περίπτωση τό μηδενίδιον της $f(z)$ είναι n -τάξεως.

Έστω $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-z_0)^n$, όπου $|z-z_0| < r_0$. (3)

Είναι δέ, $q(z_0) = a_m \neq 0$. Επειδή η (3) συγχλίνει, η $q(z)$ είναι συνεχής εις τό z_0 . Ούτω διά υάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοϋτον, ώστε να έχωμεν:

$$|q(z) - a_m| < \varepsilon \text{ διά } |z-z_0| < \delta(\varepsilon) \quad (4)$$

Εάν $\varepsilon = \frac{|a_m|}{2}$ και δ_0 είναι μία αντίστοιχος τιμή του δ , τότε λόγω της (4) θα έχωμεν:

$$|q(z) - a_m| < \frac{|a_m|}{2}, \text{ όταν } |z-z_0| < \delta_0. \quad (5)$$

Ευ των σχέσεων (5) προϋπτε, ότι εις υάθε σημείον της περιοχής $|z-z_0| < \delta_0$ είναι $q(z) \neq 0$ διότι, αν υπήρχεν σημείον τοιοϋτον ώστε $q(z) = 0$, τότε θα είχαμεν: $|a_m| < \frac{|a_m|}{2}$, όπερ άτοπον.

Ευ του ανωτέρω θεωρήματος συμπεραίνομεν ότι: ι) Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική εις ένα σημείον z_0 , τότε υπάρχει μία περιοχή $|z-z_0| < \varepsilon$ τοιαϋτη, ώστε είτε η $f(z) \equiv 0$ εντός αυτής της περιοχής, είτε η $f(z)$ δεν έχει μηδενίσοντα σημεία εντός αυτής της περιοχής μέ πιθανήν εξαίρεσιν αυτό τουτο τό σημείον z_0 , τό όποιον

δυνατόν νά είναι μηδενίσιον σημείον τῆς $f(z)$.

• Ὑποθέτομεν ἤδη ὅτι τό σημείον z_0 εἶναι ἓνα σημείον συσσωρεύσεως ἑνός ἀπειροσυνόλου καί ὅτι ἡ $f(z)=0$ εἰς καθε σημείον z αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Τότε καθε περιοχὴ τοῦ z_0 περιέχει ἓνα μηδενίσιον (κατά συνέπειαν καί ἀπείρα μηδενίσοντα) τὴν $f(z)$ διάφορον τοῦ z_0 καί ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τό z_0 , ἔπεται ὅτι ὑπάρχει καποια περιοχὴ τοῦ z_0 , ὅπου $f(z) \equiv 0$.

ii) Εἰδιωκῶς, ἐάν ἡ $f(z)=0$ εἰς καθε σημείον z καποίου πεδίου G' περιέχοντος τό z_0 ἢ εἰς καθε σημείον καποίου τόξου (γ) περιέχοντος τό z_0 καί ἐάν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τόν ἀνοιχτόν δίσκον $|z-z_0| < r_0$, ὅστις περιέχει τό ἀνωτέρω πεδίων ἢ τόξον, τότε ἡ $f(z)$ εἶναι ἐν ταυτοτήτος μηδέν εἰς αὐτόν τόν δίσκον $|z-z_0| < r_0$.

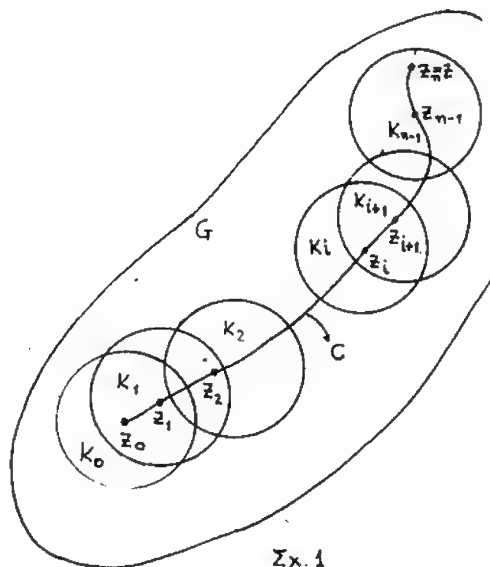
Ἡδη παραδέτομεν τό κατωθι σπουδαῖον θεώρημα.

Θεώρημα VII-5-2. Ἐάν μία συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ εἰς ἓνα πεδίων G καί εἶναι $f(z)=0$ εἰς καθε σημείον z ἑνός ὑπό-πεδίου G' ἢ ἑνός τόξου ἐσωτερικοῦ τοῦ G , τότε ἡ $f(z)=0$ εἰς καθε σημείον τοῦ G .

Ἀπόδειξις: θ' ἀποδείξωμεν τό θεώρημα εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $f(z)=0$ διὰ καθε σημείον z ἑνός πεδίου G_0 ἐσωτερικοῦ τοῦ G . Ἐστω z_0 ἓνα σημείον τοῦ G_0 καί z ἓνα σημείον τοῦ G μὴ υεῖμενον ὁμως ἐντός τοῦ G_0 . Ἐπειδὴ τό πεδίων G εἶναι συνευτιχόν, ὑπάρχει μία γραμμὴ C υειμένη ἐντός τοῦ G καί ἐνώνουσα τὰ σημεία z_0 καί z (βλ. Σχ. 1). Ἐστω p ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῆς C καί τοῦ συνόρου τοῦ G . Ἐστωσαν δέ ὅτι τὰ σημεία $z_0, z_1, z_2, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_{n-1}, z_n \equiv z$ εἶναι διαδοχικά σημεία τῆς C τοιαῦτα, ὥστε:

$$|z_{i+1} - z_i| < p \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

Ἡ ὑπαρξις τῶν σημείων τῶν ἐυανοποιούντων τὴν (1) συνάγεται ἐυνόλως ἐν τοῦ θεωρήματος τῶν Heine-Bozel (βλ. θεώρημα I-1-2). Οὕτω κατασκευάσομεν τὴν

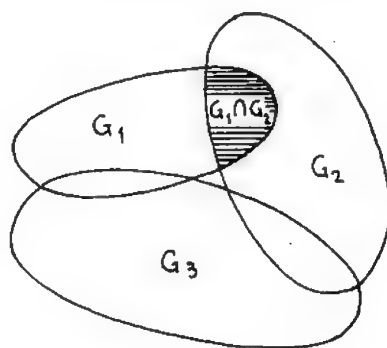


“άλλωσιν,, των άνοιγτων δίσκων $K_i, 0 \leq i \leq n-1$, όπου K_i είναι ο άνοιγτός δίσκος $|z-z_i| < \rho$. Προφανώς υάθε δίσκος K_i περιέχει τό κέντρον z_{i+1} , του “έπομένου,, δίσκου K_{i+1} . Είς έυσαστον δίσκον K_i ή $f(z)$ έχει, ως γνωστόν, ένα υατά Taylor άνάπτυγμα.

Έπειδή έξ ύποθέσεως ή $f(z) = 0$ είς υάθε σημείον του συνόλου $G_0 \cap K_0$, τό όποϊον έχει τό z_0 όρισυόν σημείον, έπεται ότι υατά τά προηγούμενα συμπεράσματα ότι, αυτή θά είναι μηδέν είς όλουληρον τόν δίσκον K_0 , τότε όμως θά είναι μηδέν είς υάθε σημείον του συνόλου $K_0 \cap K_1$ τό όποϊον έχει τό σημείον z_1 ως όρισυόν σημείον υαί υατά συνέπειαν θά είναι μηδέν έντός του δίσκου K_1 . Συνεχίζοντας τόν συλλογισμόν μας θά υαταληξωμεν ότι ή $f(z)$ είναι μηδέν είς τόν K_{n-1} δίσκον υαί έντεϋθεν είναι μηδέν είς τό σημείον $z_n \equiv z$. Ούτω ή $f(z)$ είναι μηδέν είς όλουληρον τό πεδίο G , υαθ' ότι τό z έλήφθη αυθαίρετον έντός του πεδίου G .

Πόρισμα VII-5-1. Έάν αί συνάρτησεις $f(z)$ υαί $g(z)$ είναι άναλυτιυαί παντοϋ είς ένα πεδίο G υαί αί $f(z)$ υαί $g(z)$ ταυτίσονται είς υάθε σημείον z ενός υποπεδίου G' του G , τότε αί $f(z)$ υαί $g(z)$ ταυτίσονται έφ'όλουληρου του πεδίου G .

• Ως γνωστόν ή τομή $G_1 \cap G_2$ δύο πεδίων G_1 υαί G_2 είναι ένα πεδίο. Έάν έχωμεν δύο πεδία G_1 υαί G_2 μέ υοινά σημεία υαί μίαν συνάρτησιν $f_1(z)$ ή όποία είναι άναλυτιυή έντός του G_1 ένδέχεται νά ύάρχη μία συνάρτησις $f_2(z)$ ή όποία είναι άναλυτιυή έντός του πεδίου G_2 (βλ. Σχ. 1) υαί τοιαύτη ώστε $f_2(z) = f_1(z)$ διά υάθε $z \in G_1 \cap G_2$. Έάν συμβαίνη αυτό, υαλοϋμεν τήν $f_2(z)$ άναλυτιυήν επέντασιν της $f_1(z)$ έντός του πεδίου G_2 .



Σχ. 1

Τό ζεύγος $\{G, f(z)\}$ άποτελούμενον από τό πεδίο όρισμοϋ μίας μονοτίμου άναλυτιυής συναρτήσεως υαί από αυτήν ταύτην τήν συνάρτησιν υαλεΐται στοιχειόν μέ πεδίο G . Δύο στοιχεία $\{G_1, f_1(z)\}, \{G_2, f_2(z)\}$ θά λέγωμεν ότι είναι ίσα

εάν $G_1 \equiv G_2$ και $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Δύο στοιχεία $\{G_1, f_1(z)\}$ και $\{G_2, f_2(z)\}$ θα λέγουμε ότι είναι μία απ'εξαιτίας αναλυτική επέκταση το ένα του άλλου, εάν εις τό πεδίο $D = D_1 \cap D_2$ έχουμε: $f_1(z) = f_2(z)$ διά πάθε $z \in D$.

Αποδεικνύεται ότι: Όσάκις ή αναλυτική επέκταση $f_2(z)$ υπάρχει, αυτή είναι μονοσημάντως ώρισμένη.

Έν τούτοις εάν υπάρχει μία αναλυτική επέκταση $f_3(z)$ της $f_2(z)$ από τό πεδίο G_2 εις τό πεδίο G_3 τό όποϊον G_3 τέμνει τό G_1 , ώς δεικνύεται εις τό Σχήμα 1, δέν είναι αναγκαϊόν ν' άληθεύη ή σχέση $f_3(z) = f_1(z)$ διά πάθε $z \in G_2 \cap G_3$.

Άς σημειωθ ή ότι, εις αύτήν τήν περίπτωση ή συνάρτησις όπου όρίζεται υπό τού τύπου :

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{διά πάθε } z \in G_1, \\ f_2(z) & \text{διά πάθε } z \in G_2 \end{cases}$$

είναι αναλυτική επέκταση άμφοτέρων των συναρτήσεων $f_1(z)$ και $f_2(z)$ εις τό πεδίο $G = G_1 \cup G_2$.

Παραδείγματα: 18/ Άς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν, ή όποία όρίζεται υπό της δυναμοσειράς :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (1)$$

ή σειρά (1) συγχλίνει, εάν, και μόνον εάν, $|z| < 1$.

ή δυναμοσειρά (1) είναι τό άνάπτυγμα κατά MacLaurin της συναρτήσεως $\frac{1}{1-z}$.

Όθεν :

$$f_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \text{όταν } |z| < 1$$

και ή συνάρτησις $f_1(z)$ δέν όρίζεται υπό της δυναμοσειράς, όταν $|z| \geq 1$.

Ήδη άς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν :

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \text{μέ } z \neq 1.$$

ή όποία όρίζεται και είναι αναλυτική παντού έντός τού σημείου $z=1$. Έπειδή εις τό πεδίο $|z| < 1$ έχουμε $f_1(z) = f_2(z)$, ή συνάρτησις $f_2(z)$ είναι ή αναλυτική επέκταση της $f_1(z)$ εις όλόκληρον τό μιγαδικόν επίπεδον έντός τού σημείου $z=1$. Είναι δέ ή $f_2(z)$ ή μοναδική αναλυτική επέκταση της $f_1(z)$ επί πλέον δέ τό

Σεŷχος $\{|z| < 1, f_1(z)\}$ είναι ένα στοιχείον της $f_2(z)$.

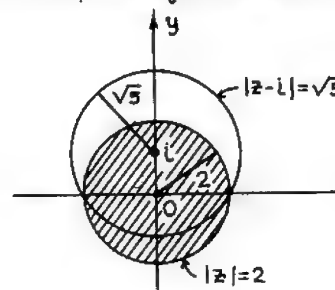
2%. Άς θεωρήσωμεν τὰς συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ὑπὸ τῶν δυναμοσει-
ρῶν : $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ καὶ $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$.

Ἐφαρμόζοντες τὸ κριτήριον τῶν λόγων ἡ πρώτη σειρά συγκλίνει διὰ $|z| < 2$ (βλ. Σχ.1). Αὕτη δέ ἐστὶν μία γεωμετρικὴ σει-
ρά μὲ πρῶτον ὅρον τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ λόγον $\frac{z}{2}$.

Αὕτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά της
καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ συνάρτησις $f_1(z) = \frac{1/2}{1-z/2} = \frac{1}{2-z}$

Ὁμοίως ἡ δευτέρα σειρά, βάσει τοῦ ἰδίου κρι-
τηρίου, συγκλίνει διὰ $|\frac{z-i}{2-i}| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < \sqrt{5}$ (βλ.
Σχ.1). Καὶ αὕτη δέ ἐστὶν μία γεωμετρικὴ σειρά

μὲ πρῶτον ὅρον τὸν $\frac{1}{2-i}$ καὶ λόγον τὸν $\frac{z-i}{2-i}$, δύναται δέ νὰ ἄθροισθῇ καὶ τὸ
ἄθροισμά της εἶναι ἡ συνάρτησις $f_2(z) = \frac{1/(2-i)}{1-\frac{z-i}{2-i}} = \frac{1}{2-z}$. Ἐπειδὴ δέ αἱ δύο δυναμο-
σειραὶ παριστοῦν τὴν αὐτὴν συνάρτησιν εἰς τὸ χωρίον $D = \{z : |z| < 2\} \cap \{z : |z-i| < \sqrt{5}\}$
δηλ. τὸ κοινὸν χωρίον τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸ ἑσωτεριὸν τῶν κύκλων $|z|=2$ καὶ
 $|z-i|=\sqrt{5}$, ἔπεται ὅτι, ἐκάστη εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς ἄλλης.



Σχ. 1

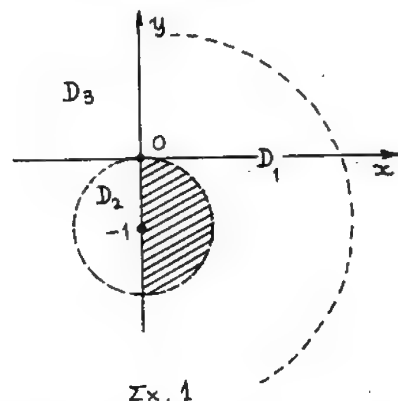
3%. Άς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν ἡ ὁποία ὀρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \quad (1)$$

Τὸ ὅλουλήρωμα (1) ὑπάρχει μόνον ὅταν
 $\operatorname{Re} z > 0$ καὶ τότε δίδει:

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \quad (2)$$

Ὁ τόπος ὀρισμοῦ D_1 τῆς $f_1(z)$, μέσω τοῦ ὁλοκλη-
ρώματος (1), δηλ. ὁ τόπος $\operatorname{Re} z > 0$, δεικνύεται εἰς
τὸ Σχ.1. Ἡ δέ συνάρτησις $f_1(z) = \frac{1}{z}$ εἶναι ἀναλυ-
τικὴ εἰς αὐτόν.



Σχ. 1

Ἐστω ἤδη καὶ ἡ συνάρτησις $f_2(z)$, ἡ ὁποία ὀρίζεται μέσω τῆς γεωμετρικῆς σειρᾶς:

$$f_2(z) = i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{i} \right)^n, |z+i| < 1 \quad (3).$$

Ἡ σειρά (3) συγκλίνει ἐντός τοῦ μοναδιαίου κύκλου D_2 τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον $z = -i$, τὸ δὲ ἄθροισμά της ὑπολογίζεται κατὰ τὰ γνωστά καὶ εἶναι:

$$f_2(z) = i \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+i}{i}} = \frac{1}{z}, \quad \text{μέ } |z+i| < 1 \quad (4)$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι: $f_1(z) \equiv f_2(z)$ διὰ καθε $z \in D_1 \cap D_2$ (βλ. σχῆμα τὸ γραμμοσυνισθὲν τμήμα). Οὕτω ἡ $f_2(z)$ εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς $f_1(z)$ ἐντός τοῦ D_2 .

Τέλος ἡ συνάρτησις $F(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) εἶναι ἡ ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις ἀμφοτέρων τῶν συναρτήσεων $f_1(z)$ καὶ $f_2(z)$ ἐντός τοῦ πεδίου D_3 ποῦ εἶναι ὁλόκληρον τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον ἔκτος τοῦ σημείου $z = 0$. Συσχετίσατε τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα μέ τὸ Πόρισμα VIII-4-1.

42%. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots$ (1) καὶ ὁ μοναδιαῖος δίσκος E , δηλ. ὁ $|z| < 1$. Λέγομεν δὲ ὅτι, ἡ περιφέρεια $|z| = 1$ εἶναι ἓνα "φυσικὸν σύνορον" τῆς σειράς (1), δηλ. ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς $f(z)$ εἰς ἓνα εὐρύτερον πεδίου G περιέχον τὸ E . Πράγματι, ἐάν ὑπῆρχεν μία τοιαύτη ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις, τότε προφανῶς τὸ G θὰ περιεῖχεν καποῖον τόξον γ τοῦ μοναδιαίου κύκλου καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ὅριον:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} f(\rho \cdot e^{2\pi i \alpha}) \quad \text{ὅπου } z = \rho e^{2\pi i \alpha}$$

θὰ πρέπει νὰ εἶναι πεπερασμένον δι' ὅλα τὰ $e^{2\pi i \alpha} \in \gamma$.

Ὡς θὰ δείξωμεν κατωτέρω τοῦτο εἶναι ἄτοπον καὶ ὅτι, τὸ τόξον γ πρέπει νὰ περιέχη σημεῖα $e^{2\pi i \alpha}$ μέ α ρητό καὶ ἓνα τοιοῦτον ὅριον δὲν εἶναι πεπερασμένο. Πράγματι, ἔστω $\alpha = p/q$, ὅπου $p, q > 0$ εἶναι ἀμέραιοι καὶ ἔστω $z_0 = e^{2\pi i \alpha}$ καὶ $z = \rho \cdot z_0$, ὅπου $0 < \rho < 1$.

Ἡ συνάρτησις $f(z) = f(\rho e^{2\pi i \alpha})$ γράφεται:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{διότι, διὰ } n \geq q \text{ ἰσχύει } z^{n!} &= (\rho \cdot e^{2\pi i p/q})^{n!} = \rho^{n!} (e^{2\pi i p/q})^{n!} = \\ &= \rho^{n!} e^{2\pi i p \cdot n! / q} = \rho^{n!} e^{2\pi i k} = \rho^{n!} \cdot 1 = \rho^{n!}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Έστω $M = 2q + N$, όπου N είναι ένας αόθαιρετος θετικός αὐέραιος, ὅτε ἡ σχέση (2) γράφεται:

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^M p^{n!} + \sum_{n=M+1}^{\infty} p^{n!} \right| \quad \text{ἢ}$$

$$|f(z)| \geq \left| \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^M p^{n!} \right| \geq \sum_{n=q}^M p^{n!} - \sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n!} \quad (3)$$

Τό πρῶτον ἄθροισμα τῆς ἀνισότητος (3) ἔχει $M - q + 1$ τό πληθος ὀρους, ἐνῶ τό δεύτερον ἔχει $q - 2$ τό πληθος ὀρους. Ἀντιυαδιστῶμεν τούς ὀρους τοῦ πρῶτου ἄθροίσματος μέ τόν μιυρότερον πάντων ὀρον $p^{M!}$, εἰς δέ τό δεύτερον ἄθροισμα ἀντιυαδιστῶμεν πάντας τούς ὀρους πού εἶναι μιυρότεροι τῆς μονάδος ὑπό τῆς μονάδος καί τότε ἡ ἀνισότης (3) γίνεται:

$$|f(p e^{2\pi i \frac{p}{q}})| \geq (M - q + 1) p^{M!} - (q - 1) \quad (4)$$

Ἡδὴ τοῦ $p \rightarrow 1$ τό δεξιόν μέλος τῆς (4) τείνει πρὸς τόν ἀριθμόν $M - q + 1 - q + 1 = M - 2q + 2 = N + 2$.

Ὡστε, $|f(p e^{2\pi i \frac{p}{q}})| > N + 2$ (5) Ἐπειδὴ ὁ N εἶναι τυχῶν αὐέραιος ἐυ τῆς (5) ἔπεται ὅτι, ἡ $f(z)$ διὰ τὰ σημεῖα τοῦ θεωρηθέντος τόξου τῆς περιφέρειας δέν εἶναι φραγμένη.

5% Ἐστω G_k εἶναι τό πεδίου τό ὀρισδόμενον ὑπό τῶν ἀνισοτήτων:

$$\frac{(k-1)\eta}{2} < \arg z < \frac{(k+1)\eta}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

καί ἔστω $f_k(z)$ ἡ συνάρτησις ἡ ὀρισδόμενη ὑπό τοῦ τύπου:

$$f_k(z) = \log |z| + i \cdot \theta_k \quad (2)$$

ὅπου θ_k εἶναι ἡ τιμή τοῦ $\arg z$ ὑανοποιούσα τήν συνδῆκην (1). Τότε τὰ στοιχεῖα

$\{G_k, f_k(z)\}$, $\{G_\ell, f_\ell(z)\}$ εἶναι μία κατ' εὐθείαν ἀναλυτικὴ ἐπέυτασις τό ἓνα τοῦ ἄλλου, ἐάν καί μόνον, ἐάν τό ℓ λαμβάνη μίαν τῶν τιμῶν $k-1, k, k+1$.

Συμπληρώματα και άσκησεις

Ι. Σειράι Taylor

Δείξτε ότι :

- i) $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot (z+1)^n$, όταν $|z+1| < 1$.
- ii) $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$, όταν $|z-2| < 2$
- iii) $\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$, όταν $0 < |z| < 4$

2. Νά αναπτυχθούν εἰς σειράν Taylor αἱ κάτωθι συναρτήσεις καί νά εὑρεθῇ ἡ αὐτῆς συχλίσεως τῶν ἀντιστοιχῶν δυναμοσειρῶν:

i) $\log \frac{1+z}{1-z}$ ii) $\frac{z}{z^2-4z+13}$ iii) $\int_0^z e^{z^2} dz$ iv) $\int_0^z \frac{\pi \mu z}{z} dz$

3. Δείξτε ότι :

i) $\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{3n} - z^{3n+1})$, όταν $|z| < 1$

ii) $\frac{1}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) \cdot z^n$, όταν $|z| < 1$.

4. Νά εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες πρῶτοι ὅροι τοῦ ἀναπτύχματος κατὰ Taylor εἰς τὸ σημεῖον $z=0$ ἐκάστης τῶν ἀμολούθων συναρτήσεων:

i) $e^{1/4-z}$ ii) $\eta \mu \frac{1}{1-z}$ iii) $e^{z \pi \mu z}$ iv) $\sqrt{\sin z}$, ὅπου $\sqrt{\sin 0} = 1$

5. Νά αναπτυχθοῦν εἰς δυναμοσειράν τοῦ $z-1$ καί ἀμολούθως νά εὑρεθῇ ἡ αὐτῆς συχλίσεως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

i) $\frac{z}{z+2}$ ii) $\frac{z}{z^2-2z+5}$ iii) $\frac{z^2}{(z+1)^2}$

6. Δείξτε ὅτι οἱ συντελεσταί C_n τοῦ ἀναπτύχματος :

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

ἐκανοποιοῦν τὴν σχέσηιν $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$ ($n \geq 2$). Νά εὑρεθοῦν οἱ C_n καί ἡ

αυτὴς συγχλίσεως τῆς σειρᾶς.

Σημ: Οἱ ἀριθμοὶ C_n καλοῦνται ἀριθμοὶ τοῦ Fibonacci

7. Δείξατε ὅτι ἡ σειρά :

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k} \quad (1)$$

παριστᾷ μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν ἐντὸς τοῦ δίσκου $|z| < 1$. Ἀπολούθως νά ἀναπτυχθῇ εἰς σειράν Taylor ἢ ἀνωτέρω συνάρτησις $f(z)$.

8. Δείξατε ὅτι διὰ $z \neq 0$ ἔχομεν:

$$\frac{\eta\mu(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots$$

II. Σειραὶ Laurent.

9. Εἰς ἐκάστην τῶν κατωθὶ ἀσκήσεων νά ἀναπτυχθῇ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἰς σειράν τοῦ Laurent ἐκάστη εἰς τὸν δεινυόμενον ἔναντι αὐτῆς δαυτύλιον ἢ εἰς περιοχὴν τοῦ δοθέντος σημείου.

i) $\frac{1}{z-2}$ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων $z=0$ καὶ $z=\infty$

ii) $\frac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, $k = \text{φυσικός}$) εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων $z=0$ καὶ $z=\infty$

iii) $\frac{1}{(z+1)(z+4)}$ εἰς τὸν δαυτύλιον $1 < |z| < 4$ ἢ τὸν $0 < |z+1| < 3$ ἢ τὸ πεδίον $|z| > 4$ ἢ τὸ $|z| < 1$.

iv) $\frac{z^2-2z+5}{(z-2) \cdot (z^2+1)}$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=2$ καὶ εἰς τὸν δαυτύλιον $1 < |z| < 2$.

v) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$ εἰς τὴν περιοχὴν τῶν σημείων $z=i$ καὶ $z=\infty$

vi) $\text{συν} \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=2$.

vii) $e^{z+\frac{1}{z}}$ εἰς τὸ πεδίον $0 < |z| < \infty$

viii) $\eta\mu z \eta\mu \frac{1}{z}$ εἰς τὸ πεδίον $0 < |z| < \infty$

10. Νά εὐρεθῇ τὸ πρωτεύον μέρος τῆς σειρᾶς τοῦ Laurent ἐκάστης τῶν κατωθὶ

συναρτήσεων εἰς τὸ δεικνυόμενον ἔναντι ἐκείνης σημείου:

- i) $\frac{z}{(z+2)^2}$ ($z_0 = -2$) ii) $\frac{z-1}{\eta\mu^2 z}$ ($z_0 = 0$) iii) $\frac{1}{\eta\mu\pi z}$ ($z_0 = \pi$)
 iv) $\sigma\phi\pi \cdot z$ ($z_0 = \pi$) v) $\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ ($z_0 = 2\pi i$) vi) $\frac{e^{i \cdot z}}{z^2 + b^2}$ ($z_0 = ib, b > 0$).

11. Νά ἀναπτυχθῇ εἰς σειρὰν τοῦ Laurent ἡ συνάρτησις $\sinh z$ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ $z - \pi i$ διὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι: $\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{\sinh z}{z - \pi i} = -1$

III. Ἰδιόζοντα σημεία.

12. Νά εὐρεθῶν τὰ μεμονωμένα ἰδιόζοντα σημεία τῶν κατωτέρω συναρτήσεων καὶ ἡ φύσις αὐτῶν.

- i) $\frac{1}{z^3 - z^5}$ ii) $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$ iii) $\frac{z^5}{(1-z)^2}$ iv) $\frac{z^2 + 1}{e^z}$ v) $z \cdot e^{\frac{1}{z}}$ vi) $\frac{1}{\eta\mu z}$
 vii) $e\phi^2 z$ viii) $\sigma\phi z - \frac{2}{z}$ ix) $\eta\mu z \frac{1}{z}$ x) $e^{e\phi \frac{1}{z}}$ xi) $e^{-z} \sin \frac{1}{z}$ xii) $z^n \eta\mu \frac{1}{z}$ (n : ὁ-
 υἱαίος).

13. Ἐστω ἡ ρητή συνάρτησις: $f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}$, ὅπου $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. Προσδιορίσατε τὰ πεπερασμένα ἰδιόζοντα σημεία αὐτῆς, ὑποθέτοντες ὅτι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστής δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Ἀπολοῦθως δείξατε ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει μίαν ἀίρομένην ἀνωμαλίαν εἰς τὸ σημεῖον $z = \infty$, ἐὰν $m \leq n$ καὶ ἓναν πόλον τάξεως $m - n$ εἰς τὸ $z = \infty$, ἐὰν $m > n$.

14. Νά ἐξετασθῇ ἡ συμπεριφορὰ εἰς τὸ σημεῖον $z = \infty$ τῶν ἀπολούθων συναρτήσεων.

- i) $\frac{z^3}{(1+z)^2}$ ii) $\frac{e^z}{1+z^3}$ iii) $z \cdot e^{-z}$ iv) $\frac{z}{\eta\mu z}$
 v) $\sigma\phi \frac{1}{z}$ vi) $\sigma\phi \frac{1}{z}$ vii) $\eta\mu \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ viii) $e^{e\phi \frac{1}{z}}$

15. Νά παρασταθῇ ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ (α) εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Maclaurin καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ κατὰλληλον κωρίον δι' αὐτὸ τὸ ἀνάπτυγμα. (β) εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Laurent διὰ τὸ πεδίου $|z| > 1$.

Ἀπαντ: (α) $-1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ ($|z| < 1$) (β) $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$ ($|z| > 1$).

16. Υποθέτουμεν ότι η $f(z)$ έχει έναν πόλον τάξεως m εις τό z_0 . Δείξατε ότι η $f^{(n)}(z)$ έχει έναν πόλον τάξεως $m+n$ εις τό z_0 .

17. Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἐξφρασιν:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (1)$$

ὅπου τό $z_0 \neq \infty$ εἶναι ἓνα μεμονωμένον ἰδιόαδον σημεῖον τῆς $f(z)$.

Δείξατε ὅτι:

α) Τό ὄριον (1) ὑπάρχει καί εἶναι πεπερασμένον, ἐάν τό σημεῖον z_0 ἔχει μίαν διορθωμένην ἀνωμαλίαν.

β) Τό ὄριον (1) ὑπάρχει καί εἶναι ἄπειρον, ἐάν τό z_0 εἶναι ἓνας πόλος.

γ) Τό ὄριον (1) δέν ὑπάρχει, ἐάν τό z_0 εἶναι ἓνα σύσιῳδες ἀνώμαλον σημεῖον.

Διά τήν περίπτωσιν $z = \infty$ ἐξετάσομεν τό ὄριον:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{\eta}\right), \text{ ὅπου } \eta = \frac{1}{z}$$

καί ἔχομεν τά ἀντίστοιχα συμπεράσματα.

IV. Ἐπὶ τῆς ὁμαλῆς συχλίσεως

18. Προσδιορίσατε τό χωρίον ὅπου ἐκδόση τῶν κατωθι σειρῶν συγχλίνει ὁμαλῶς.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n z}{n^3} \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{n^2} \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n} \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$$

Ἀπάντ. i) $|z| \leq 1$ ii) $|z-i| \leq 1$ iii) $|z| \geq R$ ὅπου $R > 1$ iv) Διά καθε z .

19. Διά διαφορίσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς σειρᾶς

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

νά εὐρεθῇ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n$ διά $|z| < 1$. Ἐν συνεχείᾳ νά εὐρε-

θῇ τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ διά $|z| < 1$.

20. Δείξατε ὅτι: α) $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$ διά $|z| < 1$.

β) Ἐάν ἐκλέξωμεν αὐτόν τόν καλῶς τῆς $f(z) = \tan^{-1} z$ τοιοῦτον, ὥστε $f(0) = 0$, διά χρησιμοποίησεως τοῦ (α) ἀποτελέσματος δείξατε ὅτι:

$$\text{τοξ, εφ} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots$$

γ) Δείξτε ότι: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

21. Νά εξετάσετε την συμπεριφορά των κάτωδι δυναμοσειρών εις τό σύνορον του υύυλου συγυλίσεως.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

22. Δείξτε ότι ή σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγυλίνει όμαλώς εις κάθε υλειστόν δίσιον $|z| \leq r < 1$ αλλήλ σφί εις τόν άνοιυτόν δίσιον $|z| < 1$.

23. Δείξτε ότι ή σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγυλίνει όμαλώς εις τόν υλειστόν δίσιον $|z| \leq 1$ υαί άπουλίνει διά $|z| > 1$.

24. Εις τάς κάτωδι σειράς νά εύρεθ ή τό σύνολον εις τό όποϊον αΰται συγυλίνουον όμαλώς:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (z^n + \frac{1}{z^n})$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \log n}$ iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \mu n z}{n}$

V Επί της όμαλής έπευτάσεως.

25. Δείξτε ότι, ή $f_2(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$ είναι ή άναλυτιυή έπέυτασις της $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, δείκνοντας γραφικώς τά πεδία συγυλίσεως αΰτων των σειρών.

26. Δείξτε ότι ή συνάρτησις $f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} (z \neq \pm i)$ είναι ή άναλυτιυή έπέυτασις της συναρτήσεως $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ έντός του πεδίου του άποτελουμένου από όλα τά σημεία του μιγαδιουού έπιπέδου έυτός των σημείων $z = \pm i$.

27. Δείξτε ότι ή συνάρτησις $\frac{1}{z^2}$ παριστā την άναλυτιυήν έπέυτασιν της συναρτήσεως της όρισομένης ύπό της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (z+1)^n$, ($|z+1| < 1$), έντός του

πεδίου του αποτελούμενου από πάντα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός του $z=0$.

28. Δείξτε ότι η συνάρτησις $\frac{1}{z^2+1}$ είναι αναλυτική επέκτασις της συναρτήσεως $f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \eta t dt$ εντός του πεδίου του αποτελούμενου από πάντα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός των $z = \pm i$.

29. Εάν G_1 και G_2 είναι οι δίσκοι $|z| < 1$ και $|z-2| < 1$ αντίστοιχως και έστω

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-2)^n}{n}$$

Δείξτε ότι τα στοιχεία $\{G_1, f_1(z)\}$ και $\{G_2, f_2(z)\}$ είναι αναλυτική επέκτασις τό ένα του άλλου.

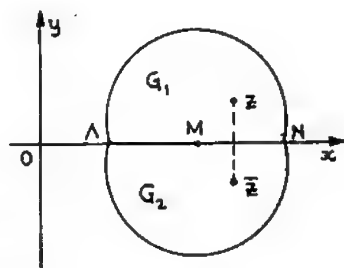
30. Δείξτε ότι αι συναρτήσεις αι ορισόμεναι υπό των σειρών $f_1(z) = 1 + az + a^2 z^2 + \dots$ και $f_2(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{(1+a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1+a)^2 z^2}{(1-z)^3} - \dots$ είναι η αναλυτική επέκτασις η μία της άλλης.

31. Δείξτε ότι η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ παριστά μίαν αναλυτικήν συνάρτησιν εντός του ανοικτού κύκλου $|z| < 1$ και ότι έχει την περιφέρειαν $|z|=1$ ως ένα φυσικόν σύνορον.

Υπόδ: Χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $f(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^k} + f(z^{2^k})$ και εν συνεχεία δείξτε ότι διά πάθε σημείον της μορφής $\eta = \sqrt[k]{1}$ (k : φυσικός αριθμός) η $f(t\eta) \rightarrow \infty$ καθώς τό $t \rightarrow 1$ ($0 < t < 1$).

32. (Άρχη του κατοπτρισμού του Schwarz z).

Υποθέτομεν ότι η $F_1(z)$ είναι αναλυτική εις τό χωρίον G_1 (βλ. Σχ. 1) και ότι η $F_1(z)$ λαμβάνει πραγματινάς τιμάς επί του τμήματος $\Lambda M N$ του πραγματικού άξονος. Έστω G_2 τό συμμετρίον του χωρίου G_1 ως πρός τόν άξονα των x και έστω $F_2(z)$ η αναλυτική επέκτασις $F_1(z)$ επί του G_2 . Δείξτε ότι θα έχωμεν: $F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})}$.



Σχ. 1

Απόδειξεις: Προφανώς ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν x θὰ ἔχωμεν:

$$F_1(z) = F_1(x) = \overline{F_1(x)} = \overline{F_1(\bar{z})}.$$

Συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα VII-5-1 ἀρνεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\overline{F_1(\bar{z})} \equiv F_2(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεδίου G_2 .

* Ἐστω $F_1(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Ἐπειδὴ αὕτη εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ πεδίου G_1 , θὰ ἰσχύ-
σιν αἱ συνθῆκαι τῶν Cauchy-Riemann ἥτοι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

ὅπου αὐταὶ αἱ μεριμαὶ παράγωγοι εἶναι συνεχεῖς.

* Ἐστω ἡδὴ $F_1(\bar{z}) = F_1(x - iy) = u(x, -y) + i v(x, -y)$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\overline{F_1(\bar{z})} = u(x, -y) - i v(x, -y) \quad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι ἡ $\overline{F_1(\bar{z})}$ ἀναλυτικὴ εἰς τὸ χωρίον G_2 , ἀρνεῖ νὰ ἔχωμεν διὰ $y > 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial(-y)} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial u}{\partial(-y)} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} \quad (3)$$

Αἱ σχέσεις (3) εἶναι ὁμοῦς ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς (1), ἔπειδὴ $\frac{\partial(-v)}{\partial(-y)} = \frac{\partial v}{\partial y}$,
 $\frac{\partial u}{\partial(-y)} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(-v)}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Ὅθεν ἔχομεν τὸ ζητούμενον ἀποτεῒλεσμα.

Παρατήρησις: Τὸ ἀνωτέρω συμπέρασμα τῆς ἀρχῆς τοῦ κατοπτρισμοῦ δύ-
νεται νὰ ἐπευταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἀντὶ ἐνὸς εὐθυγράμμου τμή-
ματος AMN ἔχομεν μίαν καμπύλην γραμμὴν.

33. Δείξατε ὅτι, ἡ συνάρτησις ἡ ὀρισθεμένη ὑπὸ τοῦ τύπου $F_1(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt} dt$ εἶναι ἀ-
ναλυτικὴ δι' ὅλα τὰ σημεῖα z διὰ τὰ ὅποια ἔχομεν $\operatorname{Re} z > 0$. Ἀπολοῦθως εὐ-
ρατε μίαν συνάρτησιν ἡ ὁποία εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς $F_1(z)$ εἰς τὸ
χωρίον $\operatorname{Re} z < 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΠΕΡΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ (RESIDUES)

§ 1. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΝ ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΜΙΑΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΕΝΑ ΜΕΜΟ- ΝΩΜΕΝΟΝ ΙΔΙΑΙΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΑΥΤΗΣ.

Ἐστω z_0 ἓνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον μιᾶς μονοτίμου ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$. Εἰς μίαν περιοχὴν αὐτοῦ τοῦ σημείου, ὥς γνωστόν, ἡ $f(z)$ δύναται ν' ἀναπτυχθῇ εἰς μίαν σειρὰν τοῦ Laurent, ἥτοι:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad (1)$$

$$\text{ὅπου} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \quad (2)$$

καὶ c εἶναι μία ἀπλὴ κλειστὴ καμπύλη διαγραφομένη κατὰ τὴν θετικὴν φοράν τοιαύτην, ὥστε ἡ $f(z)$ νὰ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπ' αὐτῆς καὶ εἰς τὸ ἑσωτερικόν της ἐντός ἀπὸ τοῦ σημείου z_0 . Ἐν τοῦ τύπου (2) διὰ $n=-1$ λαμβάνομεν:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C f(\zeta) d\zeta \quad (3)$$

Ὁρισμός VIII-1-1. Καλοῦμεν ὀλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον (Residue) τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς ἓνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον z_0 αὐτῆς, τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν, ὅστις ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τοῦ ὀλοκληρώματος $\frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta$,

θεωρουμένη καθε κλειστὴ καμπύλη C ἐπὶ τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ὀλοκληρώσις ὅτι διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν καὶ ὅτι αὕτη κεῖται εἰς τὸ πεδίον ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ περιέχουσα ἓνα μοναδικὸν ἰδιάζον σημεῖον z_0 τῆς $f(z)$.

Τὸ ὀλοκληρωτικὸν ὑπόλοιπον τῆς $f(z)$ εἰς τὸ μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον z_0 αὐτῆς δατὸ συμβολίσωμε οὕτως: $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$.

$$\text{Εἶναι λοιπὸν:} \quad \text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta \quad (4).$$

Είναι προφανές ότι, εάν το σημείο z_0 είναι ένα όμαλόν σημείο ή η $f(z)$ έχη μίαν αίρομένην άνωμαλίαν εις το z_0 , τότε το όλουθηρωτιόν υπόλοιπον της $f(z)$ εις το $z=z_0$ είναι μηδέν.

Διά να υπολογίσωμεν το όλουθηρωτιόν υπόλοιπον της $f(z)$ εις το μεμονωμένον ιδιάζον σημείο $z=z_0$, δυνάμεθα να εφαρμόσωμεν τόν τύπον (3), ήτοι:

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\eta) d\eta = C_{-1} \quad (5)$$

Όθεν, ο συντελεστής C_{-1} της σειράς του Laurent της $f(z)$ εις μίαν περιοχήν του μεμονωμένου ιδιάζοντος σημείου $z=z_0$ αυτής ισούται προς το όλουθηρωτιόν υπόλοιπον της συναρτήσεως ταύτης εις το έν λόγω σημείο.

Διάφοροι περιπτώσεις:

I. Εάν το σημείο $z=z_0$ είναι ένας πόλος της $f(z)$ η-τάξεως, τότε θα έχωμεν:

$$f(z) = (z-z_0)^{-n} \cdot g(z)$$

όπου το σημείο z_0 είναι όμαλόν της $g(z)$.

Συμφώνως προς τόν όρισμόν έχομεν:

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(\eta) d\eta}{(\eta-z_0)^n} = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0) \quad (1)$$

$$\text{Είναι όμως, } g(z) = f(z) \cdot (z-z_0)^n \text{ και } g^{(n-1)}(z) = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n]$$

$$\text{Συνεπώς } g^{(n-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z-z_0)^n] \quad (2)$$

Έυ τών (1) και (2) τελειώς λαμβάνομεν:

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z-z_0)^n f(z) \}.$$

Όθεν, το όλουθηρωτιόν υπόλοιπον της $f(z)$ εις έναν πόλον $z=z_0$, η-τάξεως δι-
δεται υπό του υάτωδι τύπου:

$$\boxed{\text{Res } f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1} \{ (z-z_0)^n f(z) \}}{dz^{n-1}}} \quad (3)$$

II. Εάν τὸ σημεῖον $z=z_0$ εἶναι ἓνας ἀπλοῦς πόλος τῆς $f(z)$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$f(z) = C_{-1} \cdot (z-z_0)^{-1} + C_0 + C_1 \cdot (z-z_0) + C_2 \cdot (z-z_0)^2 + \dots$$

Πολλαπλασιάζοντας ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος ἐπὶ $(z-z_0)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ λαμβάνοντας τὰ ὅρια αὐτοῦ, τοῦ $z \rightarrow z_0$, εὐρίσκουμεν:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot f(z) = C_{-1} = \text{Res } f(z)$$

Ὅθεν, ὅταν τὸ σημεῖον $z=z_0$ εἶναι ἓνας ἀπλοῦς πόλος τῆς $f(z)$, τότε τὸ ὅλο-
υληρωτικὸν ὑπόλοιπον ταύτης εἰς τὸ σημεῖον $z=z_0$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου.

$$C_{-1} = \text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \cdot f(z) \quad (4).$$

III. Εάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου z_0 παρίσταται ὑπὸ μορφὴν λόγου δύο ἀναλυτικῶν συναρτήσεων, ἥτοι ἂν:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \text{ὅπου } \varphi(z_0) \neq 0$$

καὶ τὸ σημεῖον z_0 εἶναι ἓνας μηδενίζων πρώτης τάξεως τῆς $\psi(z)$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\psi(z) = (z-z_0) \psi'(z_0) + (z-z_0)^2 \frac{\psi''(z_0)}{2} + \dots, \quad \text{ὅπου } \psi'(z_0) \neq 0.$$

Ἐν τῆς II περιπτώσεως ἔπεται, ὅτι τὸ z_0 εἶναι ἀπλὸς πόλος τῆς $f(z)$ καὶ ὡς ἐν τούτῳ θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{\varphi(z)}{(z-z_0) \psi'(z_0) + (z-z_0)^2 \frac{\psi''(z_0)}{2}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0) + (z-z_0) \frac{\psi''(z_0)}{2} + \dots} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Ὅθεν, ἐὰν $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ καὶ ἡ $\psi(z)$ ἔχῃ τὸ $z=z_0$ μηδενίζοντα πρώτης τάξεως, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Res } f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad (5)$$

IV. Ἐστω ἡ $f(z)$ ἔχει τὸ σημεῖον $z=\infty$ ἓνα μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον. Τότε ἐντὸς ἑνὸς κύκλου μὲ ἀρμούντως μεγάλῃ αὐτὴν ἔχοντος κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων, ἡ συνάρτησις εἶναι ἀναλυτικὴ. Εάν c εἶναι ἓνας τοιοῦτος κύκλος, τότε τὸ ὅλουλήρωμα:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz,$$

ὅπου c_{-} παριστᾷ τὸν κύκλον c διαγραφόμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν,

είναι ανεξάρτητον τῆς αὐτίνος τοῦ κύκλου καί καλεῖται οἰκουμενικὸν ὑπόλοιπον τῆς $f(z)$ εἰς τὸ μεμονωμένον ἰδιάζον σημεῖον αὐτῆς $z = \infty$.

Θέτοντες $z = R \cdot e^{-i\theta}$, ὅπου R εἶναι ἡ αὐτὴς τοῦ κύκλου C καί καλοῦντες $r = \frac{1}{R}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(Re^{-i\theta}) \cdot i \cdot Re^{-i\theta} d\theta = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right) \cdot \frac{1}{re^{i\theta}} d\theta = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right) \frac{d(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^2} = \frac{-1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{d\eta}{\eta^2} \end{aligned}$$

ὅπου C παριστᾷ ἓναν κύκλον αὐτίνος r πέριξ τῆς ἀρχῆς, διαγραφόμενον κατὰ τὴν θετικὴν φοράν.

Ὅθεν, τὸ $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{f(1/z)}{z^2}$ εἰς τὴν ἀρχήν, ἥτοι:

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \operatorname{Res}_{z=0} \frac{f(1/z)}{z^2}} \quad (6)$$

Παραδείγματα: 1^ο/ Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{z}{z^n - 1}$. Αὕτη ἔχει ὡς ἰδιάζοντα σημεῖα τὰ $z_k = \sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) καί πάντα αὐτὰ τὰ σημεῖα εἶναι ἀ-
πλοὶ πόλοι. Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (5), θὰ ἔχωμεν:

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z_k}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{z_k}{z_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot z_k = \frac{1}{n} \cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \text{ διότι } z_k^n = 1.$$

2^ο/ Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{e^{-2z}}{z^3}$, ἡ ὁποία ἔχει ἓναν πόλον 3-τάξεως εἰς τὸ σημεῖον $z=0$. Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (3), θὰ ἔχωμεν:

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} [e^{-2z}] = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (4 \cdot e^{-2z}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^0 = 2.$$

3^ο/ Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$, ἡ ὁποία ἔχει ἀπλοὺς πόλους τὰ σημεῖα $z = \pm 3i$. Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (4), θὰ ἔχωμεν:

$$\operatorname{Res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left\{ (z-3i) \cdot \frac{z+1}{z^2+9} \right\} = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z+1}{z+3i} = \frac{3i+1}{6i} = \frac{3-i}{6}.$$

4^ο/ Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n}$. Αὕτη ἔχει ἰδιάζοντα τὰ σημεῖα $z = \pm i$, ἀμφότερα πόλους n -τάξεως.

Συμφώνως προς τόν τύπον (3), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-i)^n \cdot \frac{1}{(1+z^2)^n}] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+i)^n} \right] \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \Big|_{z=i} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} \cdot \frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} [(n-1)!]^2} \end{aligned}$$

59/. Έστω η συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{\eta \mu z}$, η οποία έχει τα σημεία $z_k = k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ d-πλους πόλους. Συμφώνως προς τόν τύπον (5), θα έχουμε:

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{[\eta \mu z]'} \Big|_{z=z_k} = \frac{1}{\sigma \omega z_k} = \frac{1}{\sigma \omega k\pi} = (-1)^k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

69/. Έστω η συνάρτησις $f(z) = e^{-1/z}$, η οποία έχει τό σημείον $z=0$ ουσιωδές ά-νώμαλον. Είναι δε:

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Όθεν, $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -1$.

§2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Θεώρημα VIII-2-1. Έάν η συνάρτησις $f(z)$ είναι αναλυτική εντός καί επί μιᾶς τμηματινῶς λείας καί υλειστῆς καμπύλης C ἐντός τῶν μεμονωμένων ιδιάζόν-των σημείων z_1, z_2, \dots, z_N υειμένων εντός τῆς C , τότε θα έχουμε:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

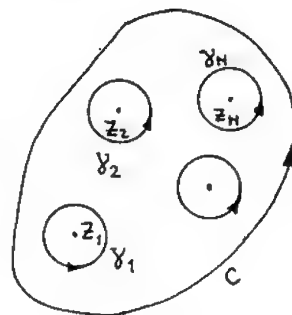
Ἀπόδειξις: Ὅπως δεικνύεται καί εἰς τό Σχ.1, ἔστωσαν z_1, z_2, \dots, z_N τά μεμονω-μένα ιδιάζοντα σημεία τῆς $f(z)$ υειμένα εντός τῆς C καί $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ εἶναι κύκλοι ἔχοντες κέντρα, τά ἐν λόγῳ σημεία ἀντιστοίχως καί ἔχοντες ἐπίσης ἀπὸ τῆς τοιαύτης, ὥστε οὗτοι νά μὴν τέμνουν τήν καμπύλην C καί νά μὴν τέμνονται μεταξὺ τῶν.

Αἱ καμπύλαι C καί $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ διαγράφονται κατὰ τήν θετικὴν φοράν.

Ὡς γνωστόν (βλ. Θεώρ. VII-2-2) θα ἔχωμεν:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} f(z) dz \quad (1)$$

Σχ.1.



Υποθέτουμε ότι, το ανάπτυγμα κατά Laurent της $f(z)$ περίε του σημείου z_k δίδεται υπό του τύπου:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(k)} \cdot (z - z_k)^n \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας όσον προς όσον την σειράν (2) κατά μήκος της καμπύλης γ_k , η δέ ολοκλήρωσις κατά όρους είναι δυνατή επειδή η σειρά συχιδίνει ομαλώς επί της περιφέρειας γ_k , επιτυχάνομεν:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} f(z) dz &= \int_{\gamma_k} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(k)} (z - z_k)^n \right] dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_k} C_n^{(k)} (z - z_k)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(k)} \int_0^{2\pi} (r_k e^{i\theta})^n d(r_k e^{i\theta}) \cdot n \\ \int_{\gamma_k} f(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i \cdot r_k^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \quad (3), \end{aligned}$$

όπου r_k είναι η ακτίς της περιφέρειας γ_k .

Άρα:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{εάν } n = -1 \\ 0, & \text{εάν } n \neq -1 \end{cases}$$

Οθεν, η ισότης (3) γίνεται:

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i C_{-1}^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

Τέλος, λόγω των (1) και (4), λαμβάνομεν:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^N 2\pi i C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^N C_{-1}^{(k)} = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res } f(z).$$

Εφαρμογή 1^η. Νά υπολογισθῇ τό $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt} dz}{z^2(z^2+2z+2)}$ κατά μήκος του κύκλου C με εξίσωσιν $|z|=3$.

Λύσις: Ἡ ολοκληρωτέα συνάρτησις $f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$ ἔχει τό σημείον $z=0$ πόλον 2-τάξεως καί τά σημεία $z=-1 \pm i$ ἀπλούς πόλους - ταῦτα εἶναι ρίζαι τῆς $z^2+2z+2=0$. Ἀπαντες οἱ πόλοι εἵναι ἐντός τοῦ κύκλου $|z|=3$. Εἶναι δέ:

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left\{ z^2 \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2+2z+2)(te^{zt}) - e^{zt}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2} = \frac{t-1}{2}.$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ [z - (-1+i)] \cdot \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \right\} = \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ \frac{e^{zt}}{z^2} \right\} \lim_{z \rightarrow -1+i} \left\{ \frac{z+1-i}{z^2+2z+2} \right\} = \frac{e^{(-1+i)t}}{(-1+i)^2} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1-i} \left\{ [z - (-1-i)] \cdot \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} \right\} = \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

Αἱ ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=3} \frac{e^{zt} dz}{z^2(z^2+2z+2)} &= 2\pi i \cdot (\text{ἄθροισμα τῶν ὁλοκληρ. ὑπολοίπων}) \\ &= 2\pi i \cdot \left\{ \frac{t-1}{2} + \frac{e^{(-1+i)t}}{4} + \frac{e^{(-1-i)t}}{4} \right\} \\ &= 2\pi i \cdot \left\{ \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t \right\} = (t-1)\pi i + e^{-t} \cdot \pi i \sin t. \end{aligned}$$

(βλ. συνέχεια 2^α ἐφαρμογῇ σελ. 231).

§ 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑΝ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ.

Ἡ ἀναπτυχθεῖσα θεωρία τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων εἰς τὰς δύο προηγουμένης παραγράφους εὐρίσκει διαφόρους ἐφαρμογὰς οὐκ μόνον εἰς τὸν ὑπολογισμόν τῶν ὁλοκληρωμάτων μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς, ἀλλὰ καὶ εἰς τὸν ὑπολογισμόν διαφόρων ὠρισμένων ὁλοκληρωμάτων μιᾶς συναρτήσεως μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Ἀρμεῖ εἰς ξυῖαστην περίπτωσιν ὑπολογισμοῦ ὠρισμένου ὁλοκληρώματος μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως ἑνὸς ἀπὸ τὴν κατάλληλον ἐκλογὴν τῆς μιγαδικῆς συναρτήσεως $f(z)$ νὰ ἐπιτυχάνομεν καὶ μίαν κατάλληλον ἐκλογὴν τῆς καμπύλης C ἐπὶ τῆς ὁποίας πρόκειται νὰ ὑάμνωμεν τὴν ὁλοκλήρωσιν. Πρὸς τοῦτοις ταξινομοῦμεν τὰ ὁλοκληρώματα ποὺ προτιθέμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν εἰς τὰς κατωθι κατηγορίας:

Ι. Ὀλοκληρώματα τῆς μορφῆς: $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \eta \mu \theta) d\theta.$

*Ἐστω ὅτι θητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \eta \mu \theta) d\theta \quad (1)$$

ὅπου R εἶναι ρητὴ συνάρτησις τῶν $\sin \theta, \eta \mu \theta$.

Ὀλοκληρώματα τοῦ τύπου (1) δύνανται νὰ ἀναχθῶν εἰς ὁλοκληρώματα μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς κατὰ μῆκος μιᾶς κλειστῆς καμπύλης. Πρὸς τοῦτοις ὑάμνομεν ἀλλαγὴν τῆς μεταβλητῆς ὁλοκληρώσεως εἰσά-

χοντας την μιγαδική μεταβλητή z , ή τις συνδέεται μετά της θ υπό της σχέ-
σεως $z = e^{i\theta}$, τότε θα έχουμε:

$$d\theta = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z}) \quad \text{και} \quad \eta\mu\theta = \frac{1}{2i} (z - \frac{1}{z}), \quad \text{όπου } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Τότε η μιγαδική μεταβλητή z υφίσταται επί της περιφέρειας $|z|=1$ και κατά
την θετική φοράν. Ούτω το ολοκλήρωμα (1) μετασχηματίζεται εις το κάτωδι
ολοκλήρωμα:

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}) \frac{dz}{z} \quad (2)$$

Ούτω, εις το ολοκλήρωμα (2) η ολοκληρωτέα συνάρτησις θα είναι προ-
φανώς μία ρητή συνάρτησις της μορφής:

$$Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m} \quad (3)$$

Η συνάρτησις (3) είναι αναλυτική εντός του κύκλου $|z|=1$ παντού, εκτός φυ-
σικά από ένα πεπερασμένον αριθμόν ιδιοσόντων σημείων z_k , όπου $0 \leq k \leq m$,
τά όποια είναι μηδενίζοντες του παρονομαστοῦ της $Q(z)$. Ἐν υαλέσωμεν N τό
πληθος τῶν μηδενίζόντων σημείων τοῦ παρονομαστοῦ, τότε $N \leq m$.

Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα τῶν ολοκληρωτικῶν υπολοίπων λαμβάνομεν:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} Q(z) \quad (4)$$

Τά σημεία z_k είναι πόλοι της συναρτήσεως $Q(z)$. Ἐάν ὁ πόλος z_k είναι α_k -
τάξεως, τότε θα ἔχωμεν ὡς γνωστόν:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{\alpha_k-1}}{dz^{\alpha_k-1}} [(z - z_k)^{\alpha_k} Q(z)] \quad (5)$$

Παράδειγμα: Νά υπολογισθῇ τό ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin\theta}, \quad |a| < 1.$$

Λύσις: Θέτομεν $z = e^{i\theta}$, ὅτε λαμβάνομεν:

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a}{2}(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}$$

οἱ μηδενίζοντες τῶν παρονομαστήν είναι $z_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$, οἱ ὅποιοι είναι ἰδιά-

Σοντα σημεία τῆς ὁλοκληρωτέας συναρτήσεως $f(z) = \frac{1}{az^2 + 2z + a}$. Ταῦτα εἶναι πόλοι πρώτης τάξεως τῆς $f(z)$. Ἐπειδὴ $z_1, z_2 = 1$ μόνον ἓνας ἐκ τῶν πόλων αὐτῶν εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z|=1$ καὶ ὡς εὐνόως δυνάμεθα νὰ διαπιστώσωμεν εἶναι τὸ σημεῖον $z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$. Ὅθεν συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VIII-2-1, ἔχομεν:

$$I = \frac{2}{i} \cdot 4\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{az^2 + 2z + a} = 4\pi \left. \frac{1}{a(z-z_1)} \right|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

II. Ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

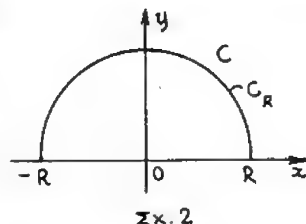
Θά ἐφαρμόσωμεν τὴν θεωρίαν τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων διὰ τὸν ὑπολογισμόν γενικευμένων ὁλοκληρωμάτων τῆς μορφῆς: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ (αἵ εἶδους).

Θά θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν, ὅπου ἡ συνάρτησις $f(x)$ εἶναι ὠρισμένη εἰς ὁλοκληρὸν τὸν πραγματικὸν ἄξονα καὶ δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἀναλυτικὴ τῆς ἐπέκτασις ἐντὸς τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου (δηλ. τοῦ $\Im m z \geq 0$) καὶ ἐπὶ πλεόν νὰ πληροῦνται ὠρισμένοι συμπληρωματικαὶ συνθῆκαι διὰ τὴν $f(z)$. Δὲν θά ἐπευταθῶμεν εἰς τὴν θεωρητικὴν ἐξέτασιν τοῦ θέματος, ἀλλὰ ἀπὸ τὸ παράδειγμα ποῦ θά ἐκθέσωμεν, ὁ ἀναγνώστης θά ἀντιληφθῇ περίπου τὴν ἐφαρμοδομένην μέθοδον διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ ἀνωτέρω τύπου.

Παράδειγμα:

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Λύσις: Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Αὕτη εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἡμιεπιπέδου, δηλ. τὸ $\Im m z \geq 0$, ἔχει τὰ σημεία $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ ($k=0,1$) ἀμφότερα ἀπλοῦς πόλους. Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, τὴν καμπύλην C (βλ. Σχ.2) ἀποτελουμένην ἀπὸ τοῦ διαστήματος $-R \leq x \leq R$ καὶ ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν C_R αὐτοῦ τοῦ R τοιαύτης, ὥστε οἱ ἀνωτέρω πόλοι νὰ εὐρίσκονται ἐντὸς τῆς C . Ἡ περιφέρεια C διαγράφεται κατὰ τὴν θετικὴν φοράν καὶ κατὰ τὸ θεώρημα VIII-2-1 τῶν ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων θά ἔχωμεν:



$$I = \int_C f(z) dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) \right\} \quad (1)$$

Είναι δε, $\text{Res} f(z) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{\frac{3i\pi}{4}}}$

$\text{Res} f(z) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{4e^{\frac{9i\pi}{4}}}$

Όθεν, $I = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9i\pi}{4}}} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (2)$

Έξ' άλλου: $I = \int_C f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^\pi \frac{R \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + 1} \quad (3)$

Είναι δε $\left| \int_0^\pi \frac{R \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + 1} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R d\theta}{R^4 - 1} = \frac{\pi \cdot R}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \text{ του } R \uparrow \infty \quad (4)$

Η (1), λόγω των (3) και (2), γράφεται:

$\int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^4} + i \cdot \int_0^\pi \frac{R \cdot e^{i\theta} d\theta}{R^4 e^{4i\theta} + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (5)$

Του $R \uparrow \infty$, λόγω της (4), η (5) δίδει:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (6)$

Επειδή $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2 \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ θα έχουμε:

$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

III. Όλοκληρώματα της μορφής: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx$.

Προειμμένου να υπολογίσωμεν ολοκληρώματα του ανωτέρω τύπου, υφίσταται ανάγκη να παραθέσωμεν το κάτωθι Λήμμα του Jordan.

Λήμμα VIII-3-1. Εάν η $f(z)$ είναι συνεχής παντού εις τό άνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου (δηλ. $\text{Im } z \geq 0$) και εάν $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ διά $z = Re^{i\theta}$, όπου $k > 0$ και M είναι σταθερά, τότε θα έχουμε:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{imz} f(z) dz = 0$$

όπου C_R είναι τό ημικύκλιον $(0, R)$ τό εύριστόμενον εις τό θεωρηθέν ημιεπίπεδον και η θετική σταθερά.

Απόδειξη: Έσ' όσον τό γ υινείται επί τής θεωρηθείσης ήμισυπεριφέρειας, δά έχωμεν: $\gamma = R e^{i\theta}$, ότε δά είναι:

$$\int_{C_R} e^{im\gamma} f(\gamma) d\gamma = \int_0^n e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) \cdot i \cdot R \cdot e^{i\theta} d\theta \quad \text{και}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^n e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) \cdot i \cdot R \cdot e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^n \left| e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) \cdot i \cdot R \cdot e^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \int_0^n \left| e^{imR\cos\theta - mR\eta\mu\theta} \cdot f(Re^{i\theta}) \cdot i \cdot R \cdot e^{i\theta} \right| d\theta \\ &= \int_0^n e^{-mR\sin\theta} \left| f(Re^{i\theta}) \right| R d\theta \\ &= \frac{M}{R^{k-1}} \cdot \int_0^n e^{-mR\eta\mu\theta} d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\eta\mu\theta} d\theta. \end{aligned}$$

λαμβάνοντες δέ υπ' όψιν και τήν γνωστήν ανισότητα του Jordan, ήται:

$\frac{2\theta}{\pi} \leq \eta\mu\theta \leq \theta$ διά $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, τότε τό τελευταίον όδουλήρωμα είναι μικρότερον ή ίσον από τό όδουλήρωμα:

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi M}{mR^k} (1 - e^{-mR})$$

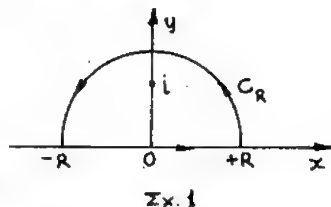
όθεν, $\left| \int_{C_R} e^{im\gamma} f(\gamma) dz \right| \leq \frac{\pi \cdot M}{mR^k} (1 - e^{-mR})$

του $R \rightarrow \infty$ και έπειδή τά m και k είναι θετικοί, έπεται ότι $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{im\gamma} f(\gamma) d\gamma = 0$.

Παράδειγμα 19^ο

Νά υπολογισθῇ τό όδουλήρωμα: $\int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} dx$, $\lambda \geq 0$.

Λύσις: Θεωρούμεν τήν συνάρτησιν $f(z) = \frac{e^{\lambda iz}}{1+z^2}$, $\lambda \geq 0$ και τήν καμπύλην C . (όπως δεικνύεται εις τό Σχ. 1) αποτελουμένη από τό τμήμα $-R \leq x \leq +R$ του πραγματιου άξονος και από τήν ήμισυπεριφέρεια C_R μέ ακτίνα $R > 1$ εύρισσομένη εις τό άνω μέρος του ήμιεπιπέδου και διαγραφομένη κατ' τήν θετικήν φοράν. Ο μόνος πόλος τής συνάρτησεως $f(z)$ έντός τής άνωτέ-



ρω καμπύλης C είναι τό σημείον $z=i$.

Εφαρμόδοντες τό θεώρημα VIII-2-1 τών όλοκληρωτιυών υπολοίπων εύρίσκειμεν:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)_{z=i} \quad (1)$$

Είναι δε, $\operatorname{Res} f(z)_{z=i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}$. Τό πρώτον μέλος τής (1) γράφεται:

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} \frac{e^{\lambda iz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-\lambda} \quad (2)$$

Είναι δε διά τά σημεία τής ήμιπεριφερείας C_R , $z = R e^{i\theta}$ και ως έυ τούτου:

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \frac{1}{|1+R^2 e^{i2\theta}|} \leq \frac{1}{R^2}$$

Εφαρμόδοντες λοιπόν τό λήμμα VIII-3-1 θα έχωμεν: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{\lambda iz}}{1+z^2} dz = 0 \quad (3)$

Η (2) λοιπόν, λόγω τής (3), δίδει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} dx = \pi \cdot e^{-\lambda} \quad (4)$$

Επειδή

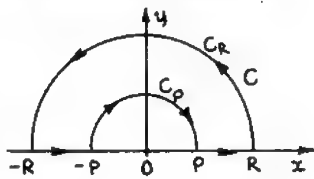
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} dx, \text{ η (4) δίδει:}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \pi e^{-\lambda}$$

Παρατήρησης: Διά $\lambda=0$ έχομεν: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

2ος. Νά υπολογισθῇ τό όλοκληρώμα: $\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu x}{x} dx$.

Λύσις: θεωρούμεν τήν συνάρτησιν $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. θα θεωρήσωμεν ως γραμμήν όλοκληρώσεως τής ανωτέρω συναρτήσεως τήν καμπύλην C τήν δεικνυομένην εις τό Σχ. 2 και διαγραφομένην κατὰ τήν φοράν που δεικνύουν τά βέλη. Ούτως ακολουθούντες αυτόν τόν δρόμον όλοκληρώσεως έχομεν εξαίρεσει τό σημείον $z=0$ που είναι πόλος τής $f(z)$. Αί



Σχ. 2

ήμιπεριφέρεiai C_R και C_p τής θεωρηθείσης περιμέτρου έχουν άυτινας R και p

ἀντιστοίχως. Ἡ $f(z)$ ἐντὸς τῆς περιμέτρου C εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ ὡς ἐκ τούτου συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Cauchy, θὰ ἔχωμεν:

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = \int_{-R}^R \frac{e^{iz}}{z} dx + \int_{C_p} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta + \int_p^R \frac{e^{iz}}{z} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0 \quad (1)$$

Ἡδὴ ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ $p \rightarrow 0$ καὶ τὸ $R \rightarrow \infty$, ὅτε ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{iz}}{z} dx + \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta + \int_0^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0 \quad (2)$$

Ἄς ὑπολογίσωμεν ἡδὴ τὰ ὅρια τῶν ὁλοκληρωμάτων τῶν ἐμφανιζομένων εἰς τὴν σχέση (2). Πρὸς τούτοις ἔχομεν:

$$\left| \frac{1}{\zeta} \right| = \left| \frac{1}{R} e^{-i\theta} \right| = \frac{1}{R}. \text{ Ἐπομένως, συμφώνως πρὸς τὸ Λήμμα VIII-3-1, θὰ ἔχω-}$$

$$\text{μεν: } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta = 0.$$

$$\text{Ἀπομένει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ: } \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta$$

Ἡ σειρά τοῦ Laurent τῆς συναρτήσεως $\frac{e^{iz}}{z}$ εἰς τὸ $z=0$ εἶναι:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + P(z), \text{ ὅπου } P(z) \text{ εἶναι τὸ κανονικὸν μέρος τοῦ ἀναπτύγματος καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ } z=0.$$

$$\text{Ὅθεν, } \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta = \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{d\zeta}{\zeta} + \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} P(\zeta) d\zeta.$$

Ἐπειδὴ $|P(z)| \leq M$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $z=0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\left| \int_{C_p} P(\zeta) d\zeta \right| \leq M \cdot \pi p \rightarrow 0 \text{ τοῦ } p \rightarrow 0.$$

$$\text{Ὅθεν, } \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} d\zeta = \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

$$\text{Εἶναι δὲ } \int_{C_p} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\pi}^0 \frac{i p \cdot e^{i\theta} d\theta}{p \cdot e^{i\theta}} = -\pi i, \text{ συνεπῶς καὶ } \lim_{p \rightarrow 0} \int_{C_p} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\pi i.$$

Η (2) λοιπόν μετά τας αντιστάσεις γράφεται:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx - \pi \cdot i + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = 0 \quad (3) \quad \text{ή}$$

Επειδή $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$, η (3) δίδει τελικώς:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Παρατήρησης: Αναλόγως αποδεικνύεται, ότι το όλουλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda > 0.$$

33%. Νά υπολογισθῇ τὸ όλουλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sigma \upsilon \nu x dx$.

Λύσις: Παρατηρούμεν ότι: $e^{-x^2} \sigma \upsilon \nu x = e^{-\frac{1}{4}} \cdot \operatorname{Re} e^{-(x+\frac{i}{2})^2}$.

Θεωρούμεν τὸ όλουλήρωμα $\int_C e^{-z^2} dz$, όπου C εἶναι τὸ σύνορον τοῦ ὀρθογωνίου

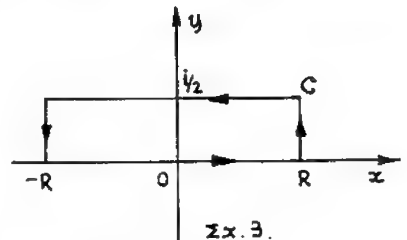
$-R \leq x < R, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ (βλ. Σχ. 3)

Επειδή ἡ $f(z) = e^{-z^2}$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντὸς τῆς C ,

θά ἔχωμεν:

$$\int_C e^{-z^2} dz = 0 \quad (1) \quad \text{ή}$$

$$\int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \int_0^{1/2} e^{-(R+iy)^2} i dy + \int_R^0 e^{-(x+i/2)^2} dx + \int_{1/2}^0 e^{-(-R+iy)^2} i dy = 0 \quad (2)$$



Παρατηρούμεν ότι:

$$\left| \int_0^{1/2} e^{-(R+iy)^2} i dy \right| \leq \frac{1}{2} e^{-(R^2 - \frac{1}{4})} \rightarrow 0, \text{ τοῦ } R \rightarrow \infty \quad (3)$$

$$\text{Ὀμοίως: } \left| \int_{1/2}^0 e^{-(-R+iy)^2} i dy \right| \leq \frac{1}{2} e^{-(R^2 - \frac{1}{4})} \rightarrow 0, \text{ τοῦ } R \rightarrow \infty \quad (4)$$

Τοῦ $R \rightarrow \infty$, λόγῳ τῶν (3) καὶ (4), ἡ (2) δίδει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{i}{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (5)$$

Το ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους της (5) ως γνωστόν ισούται προς $\sqrt{\pi}$.
 Όταν έυ της (5) λαμβάνομεν :

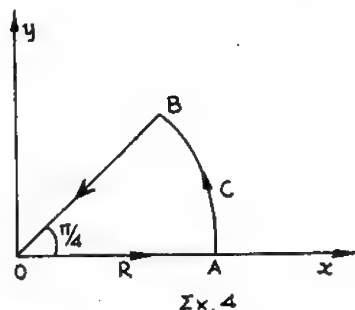
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin x dx = e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{i\pi/4} \sqrt{\pi}.$$

49%. Δείξτε ότι $\int_0^{\infty} \eta \mu x^2 dx = \int_0^{\infty} \sigma \nu x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (Ολοκλήρωμα Fresnel).

Απόδειξις: Έστω C ότι είναι η περίμετρος (βλ. Σχ. 4) ή αποτελούμενη από το τόξον \widehat{AB} κέντρου O και ακτίνους R και τας ακτίνας OA και OB.

Το ολοκλήρωμα της συνάρτησεως $f(z) = e^{iz^2}$ κατά μήκος της C είναι μηδέν, ήτοι: $\int_C e^{iz^2} d\eta = 0$ (1) ή

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{\widehat{AB}} e^{iz^2} d\eta + \int_{BO} e^{iz^2} d\eta = 0 \quad (2)$$



Είναι δε, $\eta = R e^{i\theta}$, όπου $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ και ούτω η σχέση (2) γράφεται :

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 e^{i2\theta}} i R e^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{i\tau^2 e^{i\pi/2}} e^{i\pi/4} d\tau = 0 \quad (3)$$

Έυ της (3) λαμβάνομεν:

$$\int_0^R (\sigma \nu x^2 + i \eta \mu x^2) dx = e^{i\pi/4} \left(\int_0^R e^{-\tau^2} d\tau - \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \sigma \nu 2\theta - R^2 \eta \mu 2\theta} i R e^{i\theta} d\theta \right) \quad (4)$$

Ήδη υποθέτομεν ότι $R \rightarrow \infty$. Τότε το πρώτον ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους γίνεται :

$$e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{i\pi/4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Η δέ απόλυτος τιμή του άλλου ολοκληρώματος του δευτέρου μέλους της (4) είναι:

$$\left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 \sigma \nu 2\theta - R^2 \eta \mu 2\theta} i R e^{i\theta} d\theta \right| = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \eta \mu 2\theta} R d\theta = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \eta \mu \phi} d\phi \leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{R^2 \phi}{4R}} d\phi = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2})$$

(διότι, $\eta \mu \phi \geq \frac{2\phi}{\pi}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$)

Επειδή το θεωρηθέν ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους της (4) είναι απόλυτως μι-

υπότερον ἢ ἴσον τῆς $\frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2})$, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδέν τοῦ $R \uparrow \infty$, ἔπεται οὖν καὶ τοῦτο τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τοῦ $R \uparrow \infty$.

Λαμβάνοντες λοιπὸν τὰ ὅρια τῆς (4), τοῦ $R \uparrow \infty$, εὐρίσκωμεν:

$$\int_0^\infty (\sin x^2 + i \eta \mu x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \eta$$

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \eta \mu x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

IV. Ἡ περίπτωση τῶν πλησιότιμων συναρτήσεων.

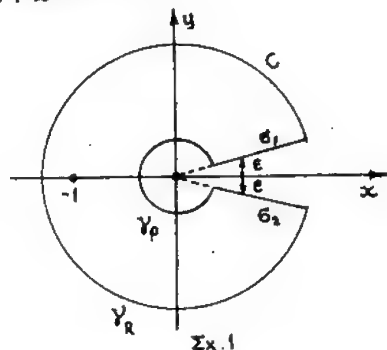
Εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις ἐθεωρήσαμεν μονότιμους ἀναλυτικούς συναρτήσεις καὶ ἐφαρμόσαμεν τὰ θεωρήματα τοῦ Cauchy διὰ τὸν ὑπολογισμόν γεννηυμένων ὁλοκληρωμάτων. Ἦτοι αἱ ἀνωτέρω μέθοδοι ἐφαρμόσθησαν μόνον ὅταν ἡ ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις $f(z)$ τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἀπὸ τὸν πραγματικὸν ἄξονα ἐντὸς ἐνὸς πεδίου φρασσομένου ὑπὸ μιᾶς περιμέτρου τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι μία μονότιμος ἀναλυτικὴ συνάρτησις.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν πού θεωροῦμεν τώρα, ἡ πλήρης ἀναλυτικὴ συνάρτησις $F(z)$ εἶναι μία πλησιότιμος συνάρτησις εἰς τὸ ἐπευτεταμένον μιγαδικὸν ἐπίπεδον, ἡ δὲ περίμετρος τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νὰ ἐκλεχθῇ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ μὴν ὑπάρχουν κλάδιὰ σημεῖα τῆς $F(z)$ ἐντὸς αὐτῆς καὶ οὕτω ἔχομεν νὰ θεωρήσωμεν μόνον ἓνα κλάδον $f(z)$ τῆς πλήρους ἀναλυτικῆς συναρτήσεως $F(z)$, ἥτις εἶναι μία κατ' εὐθείαν ἀναλυτικὴ ἐπέκτασις τῆς συναρτήσεως $f(x)$ ἐντὸς τοῦ μιγαδικοῦ πεδίου. Βάσει τῆς ἀνωτέρω μεθόδου ὑπολογίζονται διάφορα ὁλοκληρώματα.

Παράδειγμα 1^{ον}. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα: $\int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{1+x}$, $0 < p < 1$

Λύσις: Ἐστωὶ C εἶναι ἡ περίμετρος, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ Σχ. 1, ἀποτελουμένη ἀπὸ τὰ τόξα γ_p καὶ γ_R τῶν κύκλων $|z| = p$ καὶ $|z| = R$ ἀντιστοίχως καὶ ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα σ_1 καὶ σ_2 τῶν αὐτίνων ἀρχῶν $z = \varepsilon$ καὶ $z = 2\pi - \varepsilon$. Ἐστω δὲ καὶ ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z} = \frac{e^{(p-1)\log z}}{1+z}$, τὴν ὁποίαν ἐκλέγομεν οὕτως, ὥστε ὁ $\log z$ νὰ εἶναι κλάδος τοῦ λογαριθμοῦ πού ικανοποιεῖ τὴν συνθήκην:

$$0 \leq \eta \mu \log z = \arg z < 2\pi. \quad (1)$$



Η συνάρτησις $f(z)$ είναι μονότιμος και αναλυτική εντός της περιμέτρου C εκτός του σημείου $z = -1$ που είναι απλός πόλος.

$$\text{Είναι δέ, } \operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)'} \right]_{z=-1} = e^{(p-1)\log(-1)} = e^{(p-1)\pi i} = -e^{p\pi i}.$$

$$\text{Ώθεν, } \int_C \frac{z^{p-1} dz}{1+z} = -e^{p\pi i} \quad (2) \quad \eta$$

$$\int_{\sigma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{\sigma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_p} f(z) dz = -2\pi i e^{p\pi i} \quad (3)$$

Είναι δέ:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{|z|^{p-1} |dz|}{|1+z|} \leq \frac{R^{p-1}}{R-1} \cdot (2\pi-2\varepsilon)R, \text{ όπου } z \in \gamma_R, R > 1 \quad (4)$$

$$\left| \int_{\gamma_p} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} \right| \leq \int_{\gamma_p} \frac{|z|^{p-1} |dz|}{|1+z|} \leq \frac{p^{p-1}}{1-p} \cdot (2\pi-2\varepsilon)p, \text{ όπου } z \in \gamma_p, p < 1 \quad (5)$$

Εκ τῶν (4) καὶ (5) συνάγουμεν ὅτι:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_p} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} = 0 \quad (7)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) θέσωμεν $z = re^{i\theta}$, αὕτη γράφεται:

$$\begin{aligned} & \int_P^R f(re^{i\varepsilon}) d(re^{i\varepsilon}) + \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_R^p f(re^{i(2\pi-\varepsilon)}) d(re^{i(2\pi-\varepsilon)}) + \int_{\gamma_p} f(z) dz = -2\pi i e^{p\pi i} \quad (8) \quad \eta \\ & e^{i\varepsilon} \int_P^R \frac{r^{p-1} e^{i(p-1)\varepsilon}}{1+re^{i\varepsilon}} dr + \int_{\gamma_R} f(z) dz - e^{i(2\pi-\varepsilon)} \int_p^R \frac{r^{p-1} e^{i(p-1)(2\pi-\varepsilon)}}{1+re^{i(\varepsilon-2\pi)}} dr + \\ & + \int_{\gamma_p} f(z) dz = e^{i\varepsilon+i(p-1)\varepsilon} \int_P^R \frac{r^{p-1} dr}{1+re^{i\varepsilon}} + \int_{\gamma_R} f(z) dz - \\ & - e^{-i\varepsilon-i(p-1)\varepsilon} \cdot e^{-2(p-1)\pi i} \int_p^R \frac{r^{p-1} dr}{1+re^{-i\varepsilon}} + \int_{\gamma_p} f(z) dz = -2\pi i e^{p\pi i} \quad (9) \end{aligned}$$

Υποθέτοντες ἥδη ὅτι $R \rightarrow \infty$ καὶ $p \rightarrow 0$ καὶ λαμβάνοντας ὑπ'ὄψιν τὰς (6),

και (7) & της (9) λαμβάνομεν τελικώς :

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} - e^{2(p-1)\pi i} \int_0^{\infty} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} = -2\pi i e^{p\pi i} \quad (10) \quad \eta$$

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{p-1} dz}{1+z} = -2\pi i \frac{e^{p\pi i}}{1-e^{2(p-1)\pi i}} \quad (11)$$

$$\text{Είναι δε, } -2\pi i \frac{e^{p\pi i}}{1-e^{2(p-1)\pi i}} = 2\pi i \frac{1}{e^{i\pi i} - e^{-i\pi i}} = \frac{\pi}{\eta \mu p \pi}$$

Η (11) τελικώς γράφεται θέτοντας αντί z τό x :

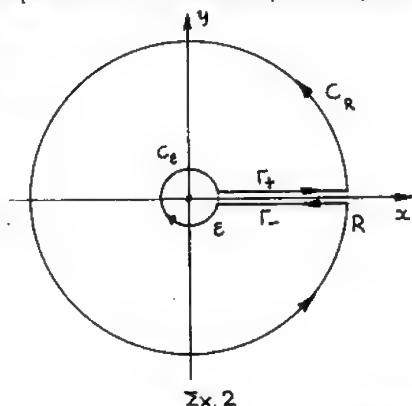
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\eta \mu p \pi} \quad (0 < p < 1).$$

Παρατηρήσεις: 1^η/ Γενικώς με την ανωτέρω μέθοδον δύναμεθα νά υπολογίσωμεν όλοκληρώματα της μορφής: $\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx$ ($0 < p < 1$), φυσικά πληρουμένων ώρισμένων υποθέσεων διά την $f(x)$.

2^η/ Όλοκληρώματα της μορφής: $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{-p} f(x) dx$, $0 < p < 1$ ανάγονται εις όλοκληρώματα της μορφής: $\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx$, εάν εις τό πρώτον έτελέσωμεν την αντίστροφισιν $y = \frac{x}{1-x}$.

3^η/ Η μέθοδος που έσολοκληθήσαμεν εις τό προηγούμενον παράδειγμα παρουσιάζει τό μειονέτημα ότι εμφανίζονται άρμεταί πράξεις. Εις τό παράδειγμα που έσολοκληθεί δά ίδωμεν μιαν άλλην ταχείαν μέθοδον υπολογισμού όλοκληρωμάτων της μορφής $\int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx$.

Παράδειγμα 2^{ον}. Νά υπολογισθί τό όλοκληρώμα $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{1+x^2}$.



Λύσις: θεωρούμεν την συνάρτησιν:

$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{1+z^2}, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

ή οποία έχει ένα κλαδιών σημείον, τό $z=1$, κατά μήκος του άξονος των x . θεωρουν-

τες δέ υαί τήν περίμετρον C διαγραφομένην, ὅπως ἀκριβῶς δεικνύεται εἰς τό Σχ. 2, δηλ. ἡ C ἀποτελεῖται: ἀπό τόν κύκλον:

$$C_R: z = R e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

τό εὐθύγραμμον τμήμα:

$$\Gamma_-: \arg z = 2\pi, \quad \varepsilon < |z| < R$$

τόν κύκλον:

$$C_\varepsilon: z = \varepsilon \cdot e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

υαί τό εὐθύγραμμον τμήμα:

$$\Gamma_+: \arg z = 0, \quad \varepsilon < |z| < R.$$

Ἡ $f(z) = \frac{z^{1/2}}{1+z^2}$ ἐντός τοῦ πεδίου τοῦ ὀρισμένου ὑπό τῆς ἀνωτέρω περιμέτρου ἔχει δύο πόλους τοῦς $z = \pm i$ υαί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῶν ὁλοκληρω-
τιῶν ὑπολοίπων λαμβάνομεν:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \left\{ \operatorname{Res} f(z)_{z=i} + \operatorname{Res} f(z)_{z=-i} \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{e^{i\pi/4}}{2i} + \frac{e^{3\pi i/4}}{-2i} \right\} = \pi\sqrt{2}. \quad (1)$$

Ἀπολούθως ὀρίζομεν τήν $f(z)$ ἐπὶ τοῦ Γ_+ ὡς τό ὄριον τῆς $f(ze^{i\theta})$ υαθῶς τό $\theta \rightarrow 0$ υαί ἐπὶ τοῦ Γ_- ὡς τό ὄριον τῆς $f(ze^{i\theta})$ υαθῶς τό $\theta \rightarrow 2\pi$. Τότε δά ἔχω-
μεν: $f(z) = \frac{z^{1/2}}{1+z^2}$ ἐπὶ τοῦ Γ_+ υαί $f(z) = -\frac{z^{1/2}}{1+z^2}$ ἐπὶ τοῦ Γ_- .

Ἡ σχέση (1) γράφεται ἀπολούθως:

$$\int_{C_R} f(\eta) d\eta + \int_{\Gamma_-} f(z) dz + \int_{C_\varepsilon} f(\eta) d\eta + \int_{\Gamma_+} f(z) dz = \pi\sqrt{2} \quad (2) \quad \eta$$

Ἡ σχέση (2) γράφεται, ἐάν λάβωμεν τὰ ὅρια τοῦ $\theta \rightarrow 0$ υαί $\theta \rightarrow 2\pi$ ὅτε τὰ τμή-
ματα Γ_+ υαί Γ_- δά υεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox -, οὕτω:

$$\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta + \int_R^\varepsilon -\frac{x^{1/2} dx}{1+x^2} + \int_{2\pi}^0 f(\varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon \cdot ie^{i\theta} d\theta + \int_\varepsilon^R \frac{x^{1/2}}{1+x^2} dx = \pi\sqrt{2} \quad (3).$$

Εἶναι δέ:

$$R \cdot \max_{|\eta|=R} |f(\eta)| \rightarrow 0 \text{ τοῦ } R \uparrow \infty$$

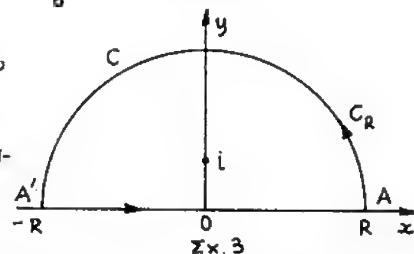
$$\varepsilon \max_{|\eta|=\varepsilon} |f(\eta)| \rightarrow 0 \text{ τοῦ } \varepsilon \rightarrow 0$$

Λαμβάνοντες λοιπόν τὰ ὅρια τῆς (3) τοῦ $R \uparrow \infty$ υαί $\varepsilon \rightarrow 0$ δά ἔχωμεν:

$$2 \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2} dx = \pi\sqrt{2} \quad (4) \quad \eta \quad \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Παράδειγμα 3^ο/ Να υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx$

Λύσις: θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2+1}$,
 ὅπου $-\pi < \arg(z+i) = \arg(z+i) \leq \pi$ ἢ $-\pi < \arg z + \frac{\pi}{2} \leq \pi$
 ἢ $-\frac{3\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ καὶ τὴν περίμετρον C ἀποτελου-
 μένη ἀπὸ τοῦ τμήματος $A'A$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος
 καὶ τὴν ἡμιπερίφερειαν C_R αὐτίνος R (βλ. Σχ. 3).



Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2+1}$ ἐντὸς τῆς ἐν λόγῳ περιμέτρου ἔχει τὸ σημεῖον $z=i$ ἀπλοῦν πόλον.

Ὡς γνωστόν δὲ ἔχωμεν:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z) \quad \text{ἢ}$$

$$\int_{-R}^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z) \quad (1)$$

$$\text{Εἶναι δὲ, } 2\pi i \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \frac{\log(2i)}{2i} = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i.$$

Ἡ (1) λοιπὸν γράφεται:

$$\int_{-R}^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i \quad (2)$$

Ἀντιδιαδιστώντες τὸ x ὑπο τοῦ $-x$ εἰς τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα τῆς (2), αὕτη γράφεται:

$$\int_0^R \frac{\log(i-x)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i \quad (3) \quad \text{ἢ}$$

ἐπειδὴ $\log(i-x) + \log(i+x) = \log(i^2 - x^2) = \log(-1) + \log(1+x^2) = \pi i + \log(1+x^2)$, ἢ
 (3) γράφεται:

$$\int_0^R \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\pi i}{x^2+1} dx + \int_{C_R} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i \quad (4)$$

$$\text{Εἶναι δὲ: } |\log(z+i)| = |\log|z+i| + i \arg(z+i)|$$

$$\leq \sqrt{\log^2(R+1) + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2} \leq 2 \log(R+1), \text{ δι' ἀρμούντως μεγάλο } R.$$

$$\text{Συνεπώς} \quad \left| \int_{C_R} \frac{\log(z+i) dz}{z^2+1} \right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{2 \cdot \log(R+1)}{R^2-1} \rightarrow 0, R \uparrow \infty$$

Λαμβάνοντας λοιπόν τα όρια διά $R \uparrow \infty$ της (4), εύρισκουμε:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1) dx}{x^2+1} + \pi i \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi \log 2 + \frac{1}{2} \pi^2 i \quad (5)$$

Έν της (5) λαμβάνομεν:

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x^2+1) dx}{x^2+1} = \pi \log 2.$$

§ 4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΝ ΥΠΟΛΟΙΣΜΟΝ ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΑΤΟΣ

Θεώρημα VIII-4-1. Δίδεται μία τμηματιῶς λεία υλειστή καμπύλη τοῦ Jordan C καὶ ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντός καὶ ἐπὶ τῆς C ἐντός δὲ ἑ-
ναν πεπερασμένον ἀριθμὸν πόλων a_1, a_2, \dots, a_n πολλαπλότητος p_1, p_2, \dots, p_n ἀντιστοι-
χως. Ὑποθέτομεν ἐπίσης ὅτι ἐντός τῆς C ἡ $f(z)$ ἔχει τὰ μηδενίζοντα αὐτὴν σημεία
 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ μέ ἀντιστοίχους πολλαπλότητας q_1, q_2, \dots, q_k . Τότε δὲ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) dz}{f(z)} = \sum_{j=1}^k q_j - \sum_{i=1}^n p_i = N - P,$$

ὅπου N ὁ ὁριστὸς ἀριθμὸς τῶν μηδενίζόντων σημείων καὶ P ὁ ὁριστὸς ἀριθμὸς
τῶν πόλων τῆς $f(z)$.

Ἀπόδειξις: (Αἰ περίπτωσης). Ἐστω ὅτι ἡ $f(z)$ ἔχει ἐντός τῆς C τὸν πόλον $z=a$
μέ πολλαπλότητα p καὶ τὸ μηδενίζον σημείον $z=b$ μέ πολλαπλότητα q . Τότε δὲ
τὸν πόλον δὲ ἔχωμεν:

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^p} \quad (1)$$

ὅπου ἡ $F(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐντός τῆς C μέ $F(a) \neq 0$.

$$\text{Εἶναι δέ,} \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-a} \quad (2)$$

$$\text{Συνεπώς:} \quad \text{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p \quad (3)$$

Διὰ τὸ μηδενίζον σημείον δὲ ἔχωμεν:

$$f(z) = (z-b)^q \cdot G(z) \quad (4),$$

όπου η $G(z)$ είναι αναλυτική εντός της C και επί πλέον $G(b) \neq 0$.

Είναι δε,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{q}{z-b} + \frac{G'(z)}{G(z)} \quad (5)$$

Συνεπώς :

$$\operatorname{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = q \quad (6)$$

Δι' εφαρμογής του θεωρήματος VIII-2-1 των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα έχουμε :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(\zeta) d\zeta}{f(\zeta)} = q - P \quad (7)$$

(Βεβ. Γενική Περίπτωσης). Συμφώνως προς την εξετασθείσαν α^η περίπτωση επειδή τα μόνα ιδιάζοντα σημεία της $\frac{f'(z)}{f(z)}$ εντός της C είναι οί πόλοι και τα μηδενίζοντα σημεία μέ τους αντίστοιχους βαθμούς πολυπλοκότητας, τό ανωτέρω θεώρημα είναι πλέον μία άμεσος συνέπεια του θεωρήματος VIII-2-1 των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

• Έστω N ό όληιός αριθμός των μηδενιζόντων σημείων και P ό όληιός αριθμός των πόλων της $f(z)$ υειμένων εντός της C , έυάστου αριθμού υπολογιζομένου ίσου προς την τάξιν. Τότε, συμφώνως προς τον τύπον του ανωτέρω θεωρήματος, θα έχουμε :

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(\zeta) d\zeta}{f(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d \log f(\zeta) d\zeta}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \log f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_c \log f(\zeta) \quad (8)$$

όπου $\Delta_c \log f(\zeta)$ παριστά την μεταβολήν της συναρτήσεως $\log f(\zeta)$ καθώς τό σημείον ζ υάμνει μίαν όλοκληρον περιστροφήν υινούμενον επί της C .

$$\text{Ός γνωστόν } \log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z) \quad (9).$$

και επίσης είναι γνωστόν ότι ή πραγματική συνάρτησις $|f(z)|$ δέν μεταβάλλεται καθώς τό z υινεΐται διαγράφων την C . ΈΕ αυτού έπεται ότι :

$$\Delta_c \log f(\zeta) = \Delta_c \{ \log |f(\zeta)| + i \arg f(\zeta) \} = i \Delta_c \arg f(\zeta) \quad (10)$$

Όθεν, ή σχέσις (8), λόγω της (10), γίνεται :

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \Delta_c \log f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot i \cdot \Delta_c \arg f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(\zeta).$$

“Οστε ,

$$N-P = \frac{i}{2\pi} \Delta_c \arg f(z) \quad (11)$$

‘Η σχέση (11) είναι σπουδαία και υαλείται ἀρχή του ὀρίσματος.

‘Εν τῶν (1) και (4) λαμβάνομεν :

$$\int_c \frac{f'(z) dz}{f(z)} = i \cdot \Delta_c \arg f(z) \quad (12)$$

§5. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROUCHE ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΟΥ

Θεώρημα III-5-1. Υποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ εἶναι ἀναλυτι-
και ἐντός και ἐπὶ μιᾶς τμηματιῶς λείας υλαιοτῆς υαμπύλης C τοῦ Jordan
και ἐπὶ πλέον ὅτι $|f(z)| > |g(z)|$ εἰς καθε σημείον τῆς C . Τότε αἱ συναρτήσεις
 $f(z)$ και $f(z) + g(z)$ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μηδενισόντων σημείων ἐντός τῆς C .

Ἀπόδειξις: Λόγω τῆς σχέσεως $|f(z)| > |g(z)|$, ἔπεται ὅτι ἡ $f(z)$ δὲν μηδενίσει-
ται ἐπὶ τῆς υαμπύλης C και ὡς ἐν τούτου ἔχομεν :

$$\Delta_c \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_c \arg \left\{ f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} = \Delta_c \arg f(z) + \Delta_c \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \quad (1)$$

Εἶναι ὁμως, $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$ διὰ καθε $z \in C$ και ὡς ἐν τούτου τὸ μεταβλητόν ση-
μεῖον w ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ :

$$w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}, \quad z \in C \quad (2)$$

διαγράφει μίαν υαμπύλην Γ υειμένη ἐντός τοῦ κύκλου $|w-1|=1$. Ὅθεν, τὸ ση-
μεῖον $w=0$ δὲν ἔχυλίζεται ὑπὸ τῆς υαμπύλης Γ , διότι πάντα τὰ σημεία τῆς
 Γ πληροῦν τὴν σχέσηιν $|w-1| < 1$, ἐνῶ τὸ $w=0$ πληροῖ τὴν σχέσηιν $|0-1|=1$.

Ἦδη ὡς ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (12) τῆς § 4 διὰ τὴν συνάρτησιν $f(w)=w$, ὅτε
θα ἔχωμεν :

$$\int_c \frac{w'}{w} dw = i \Delta_c \arg w \quad (3)$$

‘Επειδὴ τὸ ἀριστερόν μέλος τῆς (3) εἶναι μηδέν - τὸ $w=0$ υεῖται ἐ-

υπὸς τῆς C , δὲ ἔχουμεν:

$$i \Delta_c \arg w = 0 \quad \text{ἢ}$$
$$\Delta_c \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0 \quad (4)$$

Οὕτω, λόγῳ τῆς (1), δὲ ἔχουμεν:

$$\Delta_c \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_c \arg f(z) \quad (5)$$

Ἐπειδὴ λόγῳ τῆς ὑποθέσεως αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καὶ $f(z) + g(z)$ δὲν ἔχουν πόλους ἐντὸς τῆς C , συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ ὁρίσματος αἱ συναρτήσεις $f(z)$ καὶ $f(z) + g(z)$ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μηδενισόντων σημείων.

Ἐφαρμογὰι: Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τοῦ Rouché νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $z^3 - 4z^2 + z - 1 = 0$ τῶν υειμένων ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| = 1$.

Λύσις: Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $f(z) = -4z^3$ καὶ $g(z) = z^3 + z - 1$. Παρατηροῦμεν οὖν ὅτι ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| = 1$, τότε $|f(z)| = 4$, ἐνῶ $|g(z)| \leq 3$. Συνεπῶς $|f(z)| > |g(z)|$ διὰ τὰ z τῆς περιφερείας $|z| = 1$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Rouché. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν μηδενισόντων σημείων τῆς $f(z)$ ἐντὸς τῆς $|z| = 1$ εἶναι 3 (ἓνας μηδενισὸν 3-τάξεως) ἔπεται ὅτι καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τῆς συναρτήσεως $f(z) + g(z) = z^3 - 4z^2 + z - 1$ ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| = 1$ εἶναι τρία.

23/ Θεώρημα (θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας)

Δείξατε ὅτι ὑπάρχει πολυώνυμον:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

βαθμοῦ $n \geq 1$ ἔχει ἀκριβῶς n -ρίζας.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f(z) = z^n \quad \text{καὶ} \quad g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

Ἐστω R ἓνας ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $\{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|\}$. Ἐπὶ τοῦ κύκλου $|z| = R$ ἔχομε: $|f(z)| = R^n$ καὶ $|g(z)| \leq |a_1| R^{n-1} + |a_2| R^{n-2} + \dots + |a_n| \leq (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|) R^{n-1} < R^n$

Εἶναι λοιπὸν $|f(z)| > |g(z)|$, ἥτοι ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z| = R$ πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rouché καὶ ὥς ἐν τούτῳ αἱ συναρτήσεις $f(z) = z^n$ καὶ $f(z) + g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ριζῶν ἐντὸς τοῦ $|z| = R$.

Ἡ $f(z) = z^n$ ἔχει n -τό πλῆθος ρίζας, ἄρα καὶ ἡ $f(z) + q(z) = P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$ ἔχει n -τό πλῆθος ρίζας ἐντός τοῦ $|z| = R$.

Ἐπὶ πλέον ἡ $P(z) = f(z) + q(z)$ δὲν ἔχει ρίζας ἐντός τοῦ $|z| = R$ διότι, ἐάν $|z| \geq R$, ὅα ἔχω-
μεν τότε: $|z^n + q(z)| \geq |z|^n - |q(z)| > R^n - R^n = 0$, ἥτοι: $|P(z)| > 0$. Διὰ $z \geq R$, ἄρα τὸ $P(z)$
δὲν ἔχει ρίζας ἐντός ἢ ἐπὶ τῆς $|z| = R$.

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

1. Νὰ εὗρεθοῦν τὰ ὁλοκληρωτικά ὑπόλοιπα (Residues) τῶν κάτωθι συναρτήσεων
 $f(z)$ εἰς πάντα τὰ (πεπερασμένα) μεμονωμένα ἰδιόζοντα σημεία αὐτῶν:

i) $f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z+4)}$ ii) $f(z) = \frac{\eta \mu 2z}{(z+1)^3}$ iii) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 16}$

iv) $f(z) = \frac{e^z}{\eta \mu^2 z}$ v) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ vi) $f(z) = e^z z$

vii) $f(z) = \sin \frac{1}{z-2}$ viii) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ ix) $f(z) = \eta \mu z \eta \mu \frac{1}{z}$

2. Ὀμοίως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

i) $f(z) = \sin \frac{z^2 + 4z - 1}{z + 3}$ ii) $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{-nz})}$ ($n \neq 0$) iii) $f(z) = z \eta \mu \frac{1}{z+1}$

iv) $f(z) = \frac{1}{\eta \mu \frac{1}{z}}$ v) $f(z) = \frac{e^z z}{z^n}$ vi) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \sin z$

3. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_c \frac{z^3}{z^4 - 1} dz$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z| = 2$.

4. Ὀμοίως τὸ $\int_c \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2}$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z-2| = \frac{1}{2}$.

5. Ὀμοίως τὸ $\int_c \frac{e^z dz}{z^4(z^2-9)}$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z| = 1$.

6. Ὀμοίως τὸ $\int_c z^n e^{\frac{1}{z}} dz$, (n : αὐτέριος) ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z| = 1$.

7. Ὀμοίως τὸ $\frac{1}{2\pi i} \int_c \eta \mu \frac{1}{z} dz$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z| = r$.

8. Ὀμοίως τὸ $\int_c e^{\eta \mu z} dz$, ὅπου c εἶναι ὁ κύκλος $|z| = n$.

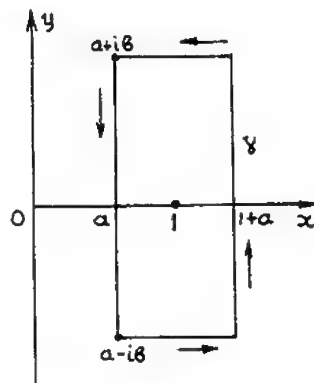
9. Έστω $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Δείξτε ότι: $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} z^{n-1} |f(z)|^2 dz = a_n \bar{a}_0 R^{2n}$.

10. Νά υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{a^z \eta \mu \pi z}$, ($a^z = e^{z \log a}$), ὅπου $a > 0$ καὶ C

εἶναι ἡ εὐθεία γραμμὴ $x = a$, $0 < a < 1$ ἐπεκτεινόμενη πρὸς τὰ ἄνω.

Υπόδο: Θεωρήσατε τὸ ὅλουλήρωμα $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{a^z \eta \mu \pi z}$,

ὅπου γ εἶναι ἡ περίμετρος τῆς δεικνυμένης εἰς τὸ Σχ. 1 καὶ ἀποσπῶντας λάβετε τὸ ὅριον τοῦ $\theta \rightarrow \infty$.



Σχ. 1

11. Νά εὐρεθῇ τὸ ὅλουληρωματικὸν ὑπόλοιπον εἰς τὸ $z = 1$ τοῦ κλάδου τῆς πλειοτίμου συναρτήσεως $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1-z}$ ἐπιτυχανομένου διὰ τοῦ περιορισμοῦ τοῦ $\arg z$ εἰς τρόπον, ὥστε $(2n-1)\pi < \arg z < (2n+1)\pi$, ὅπου n αἰθέριος.

(Ἀπάντ: $\text{Res } f(z)_{z=1} = (-1)^{n+1}$).

12. Νά υπολογισθοῦν τὰ κατωθι ὅλουληρώματα:

i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b \sin \varphi)^2}$ ($a > b > 0$) ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1+\eta \mu^2 \varphi}$ (Ἀπάντ: $\pi \sqrt{2}$)

iii) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{1-2a \sin \varphi + a^2}$ (a : μιγαδικός $\neq \pm 1$) iv) $\int_0^{\pi} \eta \mu^{2n} \varphi d\varphi$ (Ἀπάντ: $\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi$).

13. Νά υπολογισθοῦν τὰ κατωθι ὅλουληρώματα:

i) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+2x^2)}$ ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{1+x^n}$, $0 < m < n$.

14. Δείξτε ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{4^n} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

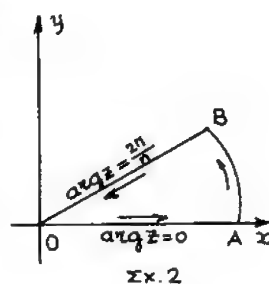
15. Χρησιμοποιώντας την περίμετρον τήν δεινυομένην εἰς τό Σχ. 2 τῆς § 3
 ὑπό § III, δείξατε ὅτι: $\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

16. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ ὑάτωδι ὁλουθῆρώματα:

i) $\int_0^{\infty} \frac{\sigma \nu x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, $a > 0, b > 0$ ii) $\int_0^{\infty} \frac{x \eta \mu x dx}{(x^2 + a^2)^2}$, $a > 0$.

17. Νά ὑπολογισθῇ τό ὁλουθῆρώμα $\int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^n}$, $n \geq 2$ φυσικός
 ἀριθμός.

Υπόδ: θεωρήσατε τό ὁλουθῆρώμα $\int_C \frac{dz}{1+z^n}$, ὅπου C εἶναι ἡ
 περίμετρος ἀποτελουμένη ἀπό τὰς ἀκτῖνας $\sigma \tau \rho \varphi z = 0$ καί
 $\sigma \tau \rho \varphi z = \frac{2\pi}{n}$ καί ἕνα κυκλιόν τόξον AB (βλ. Σχ. 2).



18. Διά χρησιμοποίησεως τοῦ λήμματος τοῦ Jordan νά ὑπολογισθοῦν τὰ ὑάτω-
 δι ὁλουθῆρώματα:

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sigma \nu x dx}{x^2 - 2x + 10}$ ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \eta \mu x dx}{x^2 - 2x + 10}$ iii) $\int_0^{\infty} \frac{x \eta \mu a x}{x^2 + b^2} dx$ ($a > 0, b > 0$)

19. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ ὑάτωδι ὁλουθῆρώματα:

i) $\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu a x dx}{x(x^2 + b^2)}$ ii) $\int_0^{\infty} \frac{\sigma \nu 2ax - \sigma \nu 2bx}{x^2} dx$ iii) $\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu^2}{x^2} dx$

Υπόδ: Χρησιμοποιήσατε διά τ'άνωτέρω ὁλουθῆρώματα τό ὁλουθῆρώμα $\int_C \frac{e^{\frac{2iz}{2^2}} - 1}{z^2} dz$,
 ὅπου C εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ Σχ. 2 τῆς § 3 τῆς ὑπό-§ III.

20. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλουθῆρώματα (τῶν πλησιότιμων συναρτήσεων):

i) $\int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{1+x^2} dx$ ii) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \log x}{(1+x^2)^2} dx$ iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{1+x^2}$ ($-1 < a < 1$)

21. Νά δειχθῇ ὅτι: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Υπόδο: Πρὸς τούτοις θεωρήσατε τὴν συν-
άρτησιν

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)\sqrt{z^2-1}}$$

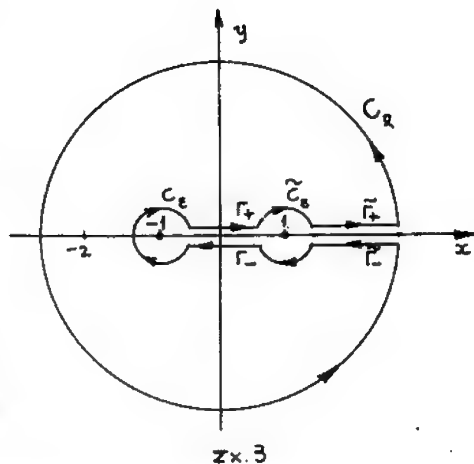
λάβετε τὸν υἱάδον τῆς πλειοστίμου συναρ-
τήσεως εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$0 < \arg(z-1) < 2\pi$$

$$\text{καὶ} \quad 0 < \arg(z+1) < 2\pi$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐτελέσατε τὴν ὁλομλήρω-
σιν κατὰ μῆκος τῆς περιμέτρου τῆς δει-
νυομένης εἰς τὸ Σχ. 3. θὰ εἶναι

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-2} f(z). \text{ Ἀπολοσύδως ὑποθέσατε ὅτι, } R \rightarrow \infty \text{ καὶ } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ κ.τ.λ.}$$



22. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλομλήρωμα $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

23. Ὑπολογίσατε τὰ κατωθι ὁλομλήρωμα, ὑποθέτοντες ὅτι $x^p > 0$ διὰ $x > 0$.

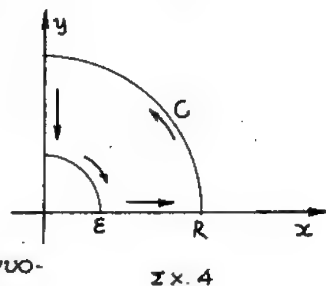
i) $\int_0^\infty x^{p-1} \sin ax dx \quad (a > 0, 0 < p < 1)$

ii) $\int_0^\infty x^{p-1} \eta \max dx \quad (a > 0, -1 < p < 1)$

Υπόδο: Χρησιμοποιήσατε τὸ ὁλομλήρωμα

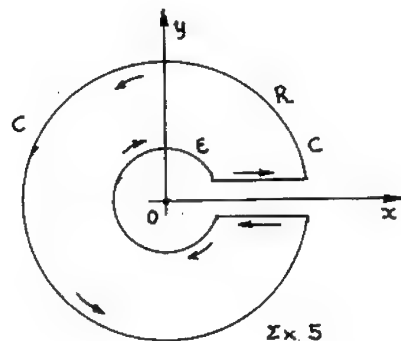
$$\int_C z^{p-1} e^{-az} dz, \text{ ὅπου } C \text{ εἶναι ἡ περίμετρος ἡ δεινυο-}$$

μένη εἰς τὸ Σχ. 4.



24. Ἐστω ὅτι ἡ ρητὴ συνάρτησις $f(z)$ ἔχουσα πόλους
 a_1, a_2, \dots, a_n οὐδεὶς τῶν ὁποίων κεῖται ἐπὶ τοῦ
πραγματινοῦ ἄξονος ἢ εἶναι μηδέν καὶ ἔστω
 ρ ἓνας πραγματινοῦς ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε:

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^{\rho+1} f(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{\rho+1} f(z)] = 0$$



Δείξτε ότι:

1) Έάν p δέν είναι αμέραιος, τότε:

$$\int_0^{\infty} x^p f(x) dx = -\frac{\pi}{\pi \mp p} e^{-\pi p i} \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=\alpha_k} [z^p f(z)]$$

2) Έάν p είναι ένας αμέραιος, τότε:

$$\int_0^{\infty} x^p f(x) dx = - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=\alpha_k} [z^p \log z f(z)],$$

όπου $\log z = \log |z| + i \arg z$, $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Υπόδ: Θεωρήσατε αντίστοιχως τα ολοκληρώματα $\int_C f(z) dz$ και $\int_C z^p \log z f(z) dz$,

όπου C είναι η περίμετρος του Σχ. 5.

25. Με την βοήθειαν του θεωρήματος του Rouché να προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

$$i) z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z \quad ii) z^3 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2.$$

26. Με τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Rouché να προσδιορισθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ εἰς τὸ χωρίον $1 \leq |z| < 2$.

27. Πόσαι ρίζαι τῆς ἐξίσωσης $e^z - 4z^n + 1 = 0$ εὐρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < 1$ (η: φυσικὸς ἀριθμὸς).

28. Δείξτε ὅτι, ἐάν $\rho < 1$, τότε διὰ τὴν ἀρμούντως μεγάλου τὸ πολυώνυμον:

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$

δὲν ἔχει ρίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < \rho$.

29. Πόσαι ρίζαι τοῦ πολυωνύμου $z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$ εἰνται εἰς τὸ δεξιὸν ἡμιπέδον;

30. Υπολογίσατε τὸ ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \frac{|dz|}{|z-z_0|^2}$

όπου $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$, $|z_0| \neq a$.

Υπόδ: Κατ' ἀρχὴν χρησιμοποιοῦντες τὴν σχέσηιν $|z|^2 = a^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = a^2$ δείξτε ὅτι εἶναι:

$|dz| = -ia \frac{dz}{z}$ καὶ ἀμολούθως διακρίνατε τὰς περιπτώσεις: i) $|z_0| < a$, ii) $|z_0| > a$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

ΜΕΡΟΜΟΡΦΟΙ ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

§ 1. ΜΕΡΟΜΟΡΦΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μία σπουδαία κατηγορία συναρτήσεων είναι η κατηγορία των συναρτήσεων των οποίων τα μόνα ανώμαλα σημεία είναι πόλοι.

Όρισμός IX-1-1. Μία συνάρτησις $f(z)$, η οποία είναι αναλυτική εις ένα ανοικτόν σύνολον G εντός από τα σημεία (τούτου) πεπερασμένου ή και άπειρου (αριθμοποιήσου) πλήθους, που είναι πόλοι αυτής, θα καλεῖται μερόμορφος συνάρτησις.

Παραδείγματα 1% Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{1-z}$ είναι μερόμορφος εντός του μιγαδικοῦ επιπέδου \mathbb{C} . Αὕτη ἔχει μόνον ἓναν ἀπλὸν πόλον, τὸ σημεῖον $z=1$. Ἡ k -τάξεως παράγωγος αὐτῆς εἶναι μερόμορφος συνάρτησις καὶ ἔχει ὡς πόλον μόνον τὸ σημεῖον $z=1$ ($k+1$)-τάξεως.

2% Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $P(z)$ καὶ $Q(z)$ εἶναι πολυώνυμα, τὸ πηλίκον $P(z)/Q(z)$ εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις εντός τοῦ \mathbb{C} καὶ ἐπιδέχεται ὡς πόλους τὰς ρίζας τοῦ $Q(z)$ μετὰ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος.

3% Ἡ συνάρτησις $g(z) = \pi m z$ ἔχει ὡς ρίζας τὰ ἀπλά σημεία $k \cdot \pi$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Συνεπῶς ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{\pi m z}$ εἶναι μερόμορφος εντός τοῦ \mathbb{C} καὶ ἐπιδέχεται ὡς ἀπλοὺς πόλους τὰ σημεία $k \cdot \pi$. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν συνάρτησιν $f(z) = \cot z$.

4% Ἡ συνάρτησις $g(z) = e^z$, ὡς γνωστὸν, δὲν ἔχει ρίζας. Ὅθεν, ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{e^z}$ δὲν ἔχει οὐδὲν ἰδιόσπον σημεῖον εντός τοῦ \mathbb{C} . Ὅθεν, δὲν εἶναι μερόμορφος ἐν \mathbb{C} .

5% Ἡ συνάρτησις $g(z) = e^z - 1$ ἔχει ὡς ἀπλάς ρίζας τὰ σημεία $2ik\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) Συνεπῶς ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ εἶναι μερόμορφος εντός τοῦ \mathbb{C} καὶ ἐπιδέχεται τὰ σημεία $z = 2ik\pi$ ὡς ἀπλοὺς πόλους.

6% Διὰ τὰδε $z \neq 0$ ἡ συνάρτησις $f(z) = \pi m \frac{1}{z}$ εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις διὰ τὴν ὁποίαν τὸ $z=0$ εἶναι ἓνα μεμονωμένον οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Ἐπίσης ἡ συνάρτησις $f(z) = \pi m \frac{1}{z}$ μηδενίζεται εἰς τὰ σημεία $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Ούτω η συνάρτησις $f(z) = \eta \mu \frac{1}{z}$ έχει μίαν άπειρίαν ριζών εις υάδε περιοχήν του $z=0$. Όθεν, εάν θεωρήσωμεν την συνάρτησιν $f(z) = \frac{1}{\eta \mu \frac{1}{z}}$, αὕτη εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις μέ άπειρους πόλους, τό δέ σημείον $z=0$ δέν εἶναι μεμωμένον ιδιάδον σημείον αὐτῆς, υαδ' ότι εις υάδε περιοχήν του $z=0$ ύπάρχουν άπειροι πόλοι τῆς συναρτήσεως.

72/ Ός γνωστόν, η συνάρτησις $f(z)$ εις τό έπευτεταμένον μιγαδιόν επίπεδον θά έχη πόλον $z=\infty$, εάν η $f(\frac{1}{z})=g(z)$ έχει πόλον τό σημείον $z=0$. Εάν θεωρήσωμεν τό πολυώνυμον $P(z)=a_0 z^m + \dots + a_{n-1} z + a_n$, τοῦτο έχει πόλον m -τάξεως τό σημείον $z=\infty$, διότι η συνάρτησις:

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_0}{z^m} + \frac{a_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n$$

έχει τό $z=0$ πόλον m -τάξεως. Ούτω η $P(z)$ εἶναι μερόμορφος συνάρτησις εις τό έπευτεταμένον μιγαδιόν πεδίον.

Άποδεικνύεται ότι:

Πρότασις IX-1-1. Εάν η σειρά $\sum_n f_n(z)$ τών μερομόρφων συναρτήσεων συγυλινη όμαλώς επί παντός συμπαγούς συνόλου, έστω G , τότε υαί η σειρά τών παραγώγων $\sum_n f'_n(z)$ συγυλινει όμαλώς επί του συμπαγούς G υαί τό άθροισμά της εἶναι η παράγωγος του άθροίσματος $\sum_n f_n(z)$.

Άς επανέλθωμεν λοιπόν εις την μερόμορφον συνάρτησιν $f(z)$ επί του χωρίου G . Τότε εις υάδε πόλον a_n αντιστοιχεί τό ιδιάδον μέρος τῆς $f(z)$, τό όποϊον εἶναι τό πρωτεῦον μέρος τῆς σειρᾶς του Λαυκεντ' πού αναπτύσσεται η $f(z)$ πέριξ του πόλου $z=a_n$. Αὐτό τό μέρος εἶναι ένα πολυώνυμον τῆς μορφῆς $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$.

Διατάσσοντες δέ τούς πόλους υατά τάξιν μέτρου, συμφώνως πρός τ' άνωτέρω, δυνάμεθα νά επιτύχωμεν την υάτωδι παράστασιν μιᾶς μερομόρφου συναρτήσεως, ήτοι:

$$f(z) = \sum_n P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P(z) \quad (1)$$

όπου η $P(z)$ εἶναι αναλυτική εις τό χωρίον G .

Τό άθροισμα του δεξιού μέλους τῆ (1) εἶναι έν γενεί άπειρον υαί ούτω δέν δυνάμεθα νά εξασφαλίσωμεν έν τών προτέρων την σύγυλιν τῆς σειρᾶς (1). Έν τούτοις ύπάρχουν μερισί περιπτώσεις υατά τās όποιās η σειρά συγυλινει υαί τό σπουδαιότερον εἶναι ότι συχνά δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν άκριβώς την

συνάρτησιν $P(z)$ από μίαν γενικυήν θεωρήσιν τῆς δοθείσης συναρτήσεως.

Δὲν θά ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἀνωτέρω ἀντιυειμένου εἰς ὅλον τὸ βάθος καθ' ὅτι τοῦτο ἐξέρχεται τοῦ σκοποῦ τοῦ παρόντος βιβλίου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ G εἶναι ὁλόκληρον τὸ μιχαδιὸν ἐπίπεδον, ἀποδεικνύεται ὅτι, καθε μερόμορφος συνάρτησις ἔχει ἓνα ἀνάπτυγμα εἰς ἀπλά μέρηματα καὶ ὅτι τὸ ἰδιάζον μέρος δύναται νὰ περιγραφῇ αὐδαιρέτως. Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις περιγράφεται ὑπὸ τοῦ κατωθι θεωρήματος, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τοὺς Mittag-Leffler.

Θεώρημα IX-1-1. (Mittag-Leffler). "Ἐστω $\{a_n\}$, $n \geq 1$ μία ἀσολουδία μιχαδιῶν ἀριθμῶν μὲ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ καὶ ἔστω $P_n(z)$ μία ἀσολουδία πολυωνύμων ἀνευσταθεροῦ ὅρου. Τότε ὑπάρχουν συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι μερόμορφαι εἰς ὁλόκληρον τὸ μιχαδιὸν ἐπίπεδον μὲ πόλους τὰ σημεῖα a_n καὶ ἀντίστοιχα ἰδιάζοντα μέρη τὰ $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$. Ἐν τούτοις ἡ πλέον γενικυή μερόμορφος συνάρτησις αὐτοῦ τοῦ εἶδους δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(z) = \sum_n \left[P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n(z) \right] + q(z) \quad (2)$$

ὅπου τὰ $p_n(z)$ εἶναι καταλητῆλου ἐκλογῆς προσδιοριστέα πολυώνυμα καὶ ἡ $q(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς ὁλόκληρον τὸ μιχαδιὸν ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ εἶναι ἀναλυτικὴ διὰ $|z| < |a_n|$, δύναται αὕτη νὰ ἀναλυθῇ εἰς μίαν σειράν τοῦ MacLaurin περὶ τῆς ἀρχῆς, ὑποδέτοντες φυσικὰ ὅτι, $a_n \neq 0$. Ἐυλέγομεν ὡς $p_n(z)$ ἓνα μερικὸν ἄθροισμα αὐτῆς τῆς σειράς μὲ τελευταῖον ὅρον βαθμοῦ λ_n . Οὕτω, ἐάν $|P_n| \leq M_n$, τότε βάσει τοῦ τύπου (4), Κεφ. VII, § 1 θά ἔχωμεν, ἐάν θεωρήσωμεν $|z| = r_1 = \frac{|a_n|}{2}$ καὶ $|z| = r < r_1$

$$\left| P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n(z) \right| = \left| R_{\lambda_n+1}(z) \right| \leq M_n \cdot \frac{|a_n|}{2} \cdot \frac{1}{\frac{|a_n|}{2} - r} \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\lambda_n+1}.$$

Ἐάν $|z| = r < \frac{|a_n|}{4}$, τότε $\frac{1}{\frac{|a_n|}{4} - r} < \frac{1}{\frac{|a_n|}{2}}$ καὶ ἡ ἀνωτέρω σχέσηις γράφεται:

$$|P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n(z)| \leq M_n \cdot \left(\frac{4|z|}{|a_n|}\right)^{\lambda_n+1} \quad (3)$$

ήτις ισχύει διά $|z| \leq \frac{|a_n|}{4}$.

Μέ αυτόν τόν ὑπολογισμόν εἶναι προφανές, ὅτι ἡ σειρά τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (3) δύναται νά συγυλινῇ ἐυθέτως τούς ἐυθέτας λ_n ἀρυσύντως μεγάλους.

Διά χρησιμοποίησιν τοῦ τύπου τοῦ δίδοντος τήν αὐτῖνα συγυλίσεως μιᾶς δυναμοσειράς εὐρίσκειμεν, ὅτι ἡ δυναμοσειρά :

$$\sum_n M_n \left(\frac{4z}{a_n}\right)^{\lambda_n+1} \quad (4)$$

συγυλινεῖ εἰς ὁλόουληρον τό ἐπίπεδον, ἐάν τό $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n^{\lambda_n}}{|a_n|} = 0$ καί αὐτό συμβαίνει, ἐάν $\lambda_n > \log M_n$.

Θεωροῦμεν ἕναν αὐθαίρετον δίσκον $|z| \leq R$. Ἡ σειρά $\sum_n (P_n - p_n)$ ἔχει μόνον ἕναν πεπερασμένον ἀριθμόν ὅρων, οἱ ὅποιοι καθίστουσιν αὐτήν ἄπειρον ἐντός τοῦ δίσκου $|z| \leq R$ καί ἀπό μίαν ὠρισμένην τιμήν τοῦ n καί μετά ἡ ἀνισότης (3) δά ἰσχύη παντοῦ ἐπὶ τοῦ δίσκου. Ἐάν δέ οἱ ὅροι μέ $|a_n| \leq R$ παραληφθοῦν, ἡ ἐναπομένουσα σειρά, λόγῳ τῆς (3), δά συγυλινῇ ἀπολύτως καί ὁμαλῶς ἐντός τοῦ $|z| \leq R$. Ἐπειδή τό R ἐλήφθη αὐθαίρετον, ἡ σειρά $\sum_n (P_n - p_n)$ συγυλινεῖ δι' ὅλα τὰ $z \neq a_n$ καί παριστᾷ μίαν μερόμορφον συνάρτησιν εἰς ὁλόουληρον τό μιχαδιδόν ἐπίπεδον.

Ἡ συνάρτησις αὕτη δά ἔχη τούς αὐτούς πόλους καί ἰδιόζοντα μέρη μέ τήν $f(z)$.

Ὅθεν, ἡ διαφορά :

$$f(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[P\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - p_n \right]$$

τήν ὁποίαν ἄς καλέσωμεν $g(z)$, δά εἶναι, προφανῶς, μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις. ὅ.ε.δ.

§2. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΕΙΣ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ MITTAG - LEFLER.

Ι. Ἡ συνάρτησις $f(z) = \frac{n^2}{n! z^n}$ ἔχει πόλους 2-τάξεως τὰ σημεῖα $z=n$, n : ἀμέραιος. Τό ἰδιόζον μέρος τῆς $f(z)$ διά $z=0$, δηλ. τό πρωτεύον μέρος τῆς σειράς τοῦ Laurent ποῦ ἀναπτύσσεται ἡ $f(z)$ περὶ τοῦ σημείου $z=0$, εἶναι τό $\frac{1}{z^2}$ καί

ἐπειδὴ $\eta\mu^2\pi(z-\eta) = \eta\mu^2\pi z$, τὰ ἰδιόζοντα μέρη εἰς τὰ σημεῖα $z = \eta$ εἶναι $\frac{1}{(z-\eta)^2}$.

Ἡ σειρά :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\eta)^2} \quad (1)$$

συγκλίνει διὰ $z \neq \eta$, διότι συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον συγκρίσεως ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ εἶναι συγκλίνουσα. Αὕτη ἡ σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπὶ παντός συμπαγούς συνόλου, ἐφ' ὅσον παραλειφθοῦν οἱ ὅροι οἱ ὁποῖοι τὴν καθιστοῦν ἄπειρον ἐπ' αὐτοῦ τοῦ συνόλου.

Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὸ ἄνωτέρω θεώρημα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\frac{\pi^2}{\eta\mu^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\eta)^2} + q(z) \quad (2)$$

ὅπου ἡ $q(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐξ ὁλοκλήρου τοῦ ἐπιπέδου. Ἐν συνεχείᾳ δὲ δεῖξωμεν ὅτι ἡ $q(z)$ εἶναι ἐκ ταυτοτήτος μηδέν. Πρὸς τοῦτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\frac{\pi^2}{\eta\mu^2\pi z}$ καὶ ἡ σειρά (1) εἶναι περιοδικαὶ μὲ περίοδον 1¹⁾. Συνεπῶς καὶ ἡ $q(z)$ θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν περίοδον.

Θέτοντες $z = x + iy$ θὰ ἔχωμεν :

$$|\eta\mu\pi z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x$$

καὶ ἐντεῦθεν τὸ $\frac{\pi^2}{\eta\mu^2\pi z}$ τείνει ὁμαλῶς πρὸς τὸ 0 τοῦ $|y| \rightarrow \infty$, ἥδη εὐνόλως διαπιστοῦται ὅτι καὶ ἡ συνάρτησις (1) ἔχει τὴν αὐτὴν ιδιότητα, δηλ. τείνει πρὸς τὸ μηδέν τοῦ $|y| \rightarrow \infty$. Πράγματι ἡ σύγκλισις αὐτῆς εἶναι ὁμαλὴ διὰ $|y| \geq 1$ καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν $\frac{1}{|z-\eta|^2} = \frac{1}{(x-\eta)^2 + y^2} \leq \frac{1}{y^2}$, ἔπεται ὅτι τοῦ $|y| \rightarrow \infty$ ἡ σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\eta)^2}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Ὅθεν, καὶ ἡ $q(z)$ τείνει ὁμαλῶς πρὸς τὸ μηδέν τοῦ $|y| \rightarrow \infty$. Αὐτὸ εἶναι ἱκανὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ $|q(z)|$ εἶναι φραγμένη εἰς μίαν περιοδικὴν λωρίδα $0 \leq x \leq 1$ καὶ λόγῳ τῆς περιοδικότητος τῆς $|q(z)|$ αὕτη θὰ εἶναι φραγμένη εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον. Συμφώνως δὲ πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Λιουνίλλε ἡ $q(z)$ θὰ πρέπει νὰ ἀνάγεται εἰς μίαν σταθεράν καὶ ἐπειδὴ τὸ ὅριον αὐτῆς διὰ $|y| \rightarrow \infty$ εἶναι μηδέν, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν $q(z) \equiv 0$. Ἡ (2) λοιπὸν γράφεται :

$$\boxed{\frac{\pi^2}{\eta\mu^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\eta)^2}} \quad (3)$$

1) Ἰσχύει ὁ αὐτὸς ὁρισμὸς τῆς περιοδικότητος ὥπως καὶ εἰς τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις.

II. θεωρούμεν τὴν σειράν:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = f(z) \quad (4)$$

(ὅπου ὁ τόνος εἰς τὸ σύμβολον τῆς ἀδροίσεως δηλοῖ ὅτι δὲν λαμβάνεται ὁ ὅρος πού ἀντιστοιχεῖ εἰς $n=0$)

Αὕτῃ ἡ σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς εἰς καθε συμπαγές σύνολον.

Πράγματι,

$$\left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{r}{|n| \cdot ||n| - r} \quad \text{διὰ } |n| > r \text{ καὶ } |z| = r$$

Ὁ γενικὸς ὅρος φράσσεται ἀπὸ τὸν γενικὸν ὅρον μιᾶς συγκλινούσης σειράς. Ὑπάρχει λοιπὸν ὁμαλὴ σύγκλισις τῆς θεωρηθείσης σειράς, παραλείποντες ἔναν πεπερασμένον ἀριθμὸν ὅρων τῆς δοθείσης σειράς (εἶναι αὐτοὶ διὰ τοὺς ὁποίους $|n| \leq r$).

Τὸ ἄθροισμα $f(z)$ αὐτῆς τῆς σειράς εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραγωγίσωμεν ὅρον πρὸς ὅρον αὐτὴν τὴν σειράν καὶ οὕτω νὰ ἐπιτύχωμεν:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}' \left\{ -\frac{1}{(z-n)^2} \right\} = -\left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}' \frac{1}{(z-n)^2} \right\} = -\frac{\pi^2}{\eta \mu^2 \pi z} \quad (\text{λόγω τῆς 3})$$

Συνεπῶς δι' ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$f(z) = \pi \cdot \sigma\phi \pi z + C \quad (5)$$

Ἐπειδὴ αἱ $f(z)$ καὶ $\sigma\phi \pi z$ εἶναι περιτταὶ συναρτήσεις, θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} f(-z) &= \pi \sigma\phi(-\pi z) + C & \eta' \\ -f(z) &= -\pi \sigma\phi(\pi z) + C & (5') \end{aligned}$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (5) καὶ (5') λαμβάνομεν $C=0$.

Οὕτω ἔχομεν:

$$f(z) = \pi \cdot \sigma\phi \pi z \quad (6) \quad \eta''$$

$$\boxed{\pi \cdot \sigma\phi \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)} \quad (7)$$

Ἐάν εἰς τὴν (7) προσθέσωμεν ἀνὰ δύο τοὺς ὅρους πού ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ n καὶ $-n$, θά λάβωμεν τελικῶς:

$$\boxed{\pi \cdot \sigma\phi \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}} \quad (8)$$

III. Θεωρούμεν τήν σειράν :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} \quad (9)$$

Όπως εἰς τό πρῶτον παράδειγμα, οὕτω καί ἐδῶ ἀποδεικνύεται ἐντελῶς ὁμοία, ὅτι ἡ ἀνωτέρω σειρά συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπὶ παντός συμπαγοῦς συνόλου. Τό ἄθροισμα δὲ ταύτης εἶναι μία περιοδική συνάρτησις περιόδου 1. Ἦδη ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν :

$$q(z) \equiv \frac{\pi^2}{\eta \mu \pi z \cdot \epsilon \phi \pi z} = \pi^2 \frac{\sigma \upsilon \nu \pi z}{\eta \mu^2 \pi z}$$

$$\text{Θέτομεν: } k(z) = f(z) - q(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} - \pi^2 \frac{\sigma \upsilon \nu \pi z}{\eta \mu^2 \pi z} \quad (10)$$

Αὕτη εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις ἐφ' ὁλοκληρίου τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, διότι ὁ ὅρος $\frac{1}{z^2}$ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Laurent τῆς $q(z)$ ἐξαλείφεται μεταξὺ τοῦ ὅρου $\frac{1}{z^2}$ τῆς $f(z)$ καί οὕτω δὲν ὑπάρχει ὁ ὅρος $\frac{1}{z^2}$. Τό αὐτό συμβαίνει καί διὰ τοὺς ἄλλους πόλους, λόγῳ τῆς περιοδικότητος. Οὕτω ἡ διαφορὰ $f(z) - q(z) = k(z)$ εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ \mathbb{C} καί περιόδου 1.

Ἀποδεικνύεται κατ' ἀνάλογον τρόπον, ὅπως καί εἰς τό πρῶτον παράδειγμα, ὅτι :

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} k(z) = 0, \quad (\text{ὅπου } z = x + iy).$$

Συνεπῶς ἡ $k(z)$ εἶναι φραγμένη καί κατὰ τό θεώρημα τοῦ Λιουνίλλε αὕτη δὲ πρέπει νὰ εἶναι σταθερά, ἡ δὲ σταθερὰ τιμὴ αὐτῆς δὲ εἶναι προφανῶς ἴση πρὸς τό μηδέν.

$$\text{Ὅθεν, λόγῳ τῆς (10), ἔχομεν: } \pi^2 \frac{\sigma \upsilon \nu \pi z}{\eta \mu^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} \quad (11)$$

$$\text{Ἄς θεωρήσωμεν τήν συνάρτησιν: } F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} '(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \quad (12)$$

ἡ ὁποία συγκλίνει ὁμαλῶς ἐπὶ παντός συμπαγοῦς συνόλου.

Διὰ παραγωγίσεως ὅρον πρὸς ὅρον τῆς ἀνωτέρω σειράς εὐρίσκουμεν :

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ' \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} \quad (13)$$

$$\text{Λόγῳ δὲ τῶν (11) καί (13) ἔχομεν τελικῶς: } F'(z) = \pi^2 \frac{\sigma \upsilon \nu \pi z}{\eta \mu^2 \pi z}.$$

$$\text{Ὅθεν, } F(z) = \pi^2 \int \frac{\sigma \upsilon \nu \pi z}{\eta \mu^2 \pi z} dz = \frac{\pi}{\eta \mu \pi z} + C \quad (14)$$

Ἡ σταθερὰ εἶναι μηδέν καθ' ὅτι, αἱ συναρτήσεις $F(z)$ καί $\eta \mu \pi z$ εἶναι περιτταὶ συναρτήσεις. Συνεπῶς ἐκ τῶν (12) καί (14) λαμβάνομεν τελικῶς :

$$\boxed{\frac{\pi}{\eta \mu \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} '(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)} \quad (15)$$

Ο τύπος (15) γράφεται και ως εξής :

$$\frac{\pi}{\eta \mu \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot \frac{2z}{(z^2 - n^2)} \quad (16)$$

§3. ΑΠΕΙΡΟΓΙΝΟΜΕΝΑ

Θεωρούμεν την ακολουθία των μιγαδικών αριθμών :

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$$

Έξ αυτής δυνάμεθα να σχηματίσωμεν την ακολουθία των γινομένων :

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1+C_k) = (1+C_0) \cdot (1+C_1) \cdot \dots \cdot (1+C_n), \quad n \geq 0 \quad (1)$$

ὅ P_n καλεῖται n -τάξεως μεριούν γινόμενον τῆς ακολουθίας $\{1+C_k\}, k \geq 0$.

Τό συμβολιόν γινόμενον :

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1+C_k) = (1+C_0) \cdot (1+C_1) \cdot \dots \cdot (1+C_n) \cdot \dots \quad (2)$$

καλεῖται ἀπειρογινόμενον τῆς ακολουθίας $\{1+C_k\}, k \geq 0$

Ὁρισμός IX-3-1. Θά λέγωμεν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+C_k)$ συγχλίνει, ἐάν ἡ ακολουθία $P_n = \prod_{k=0}^n (1+C_k), n \geq 0$ τῶν μεριούων γινομένων συγχλίνει πρὸς ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν διάφορον τοῦ μηδενός.

Ἐάν ὁ P_n τείνη πρὸς τό μηδέν χωρίς νάδε παράγων $1+C_k$ νά εἶναι ἴσος πρὸς τό μηδέν ἢ χωρίς νά τείνη (νάδε παράγων) πρὸς ἕνα πεπερασμένον ὅριον, τότε δά λέγωμεν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον ἀποχλίνει.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου πεπερασμένον τό πλήθος παράγοντες τοῦ γινομένου εἶναι ἴσοι πρὸς τό μηδέν, δά λέγωμεν καί πάλιν ὅτι τό ἀπειρογινόμενον συγχλίνει, ὅταν τό γινόμενον πού ἐπιτυγχάνομεν, ἐάν ἀφαιρέσωμεν αὐτούς τοὺς μηδενίζοντας παράγοντας, συγχλίνει.

Οὕτω, ἕνα ἀπειρογινόμενον εἶναι μηδέν, ἐάν τουλάχιστον ἕνας τῶν παραγόντων του εἶναι μηδέν.

Δυνάμεθα λοιπόν νά ὑποθέσωμεν ὅτι, εἰς τό ἀπειρογινόμενον (2) εἶναι $C_k \neq -1$ διά νάδε $k \in \mathbb{N}$.

Ἐπειδή $P_n = P_{n-1} \cdot (1+C_n)$ καί ἐπὶ πλέον ἐπειδή εἶναι, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1} = P \neq 0$ δά ἔχωμεν :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n}{P_{n-1}} - 1 \right) = 0.$$

ὅθεν, μία αναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συγχλίνει, εἶναι ὅτι, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$.

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δὲν εἶναι καὶ ἱκανή, δηλ. ἐάν $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$ τὸ ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ δύναται καὶ νὰ ἀπουδινή.

Πρόταση IX-3-1. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ ἀπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συγχλίνει, εἶναι διὰ πάδε $\varepsilon > 0$ νὰ ὑπάρχη ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς $N_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n > N_0(\varepsilon)$ καὶ $k > 0$ νὰ ἔχωμεν:

$$|(1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k}) - 1| < \varepsilon.$$

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκαῖον). Ἐστω $P_n = (1+c_1) \cdot (1+c_2) \cdots (1+c_n)$ καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $P_n \rightarrow P (\neq 0)$, τοῦ $n \uparrow \infty$.

Ἐντεῦθεν ὑπάρχει ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς $\omega < |P|$ τοιοῦτος, ὥστε $|P_n| > \omega$ διὰ $n = 1, 2, 3, \dots$

Συμφώνως πρὸς τὸ κριτήριον τοῦ Cauchy ὑπάρχει ἕνα N_0 τοιοῦτον, ὥστε διὰ $n > N_0$ νὰ ἔχωμεν:

$$|P_{n+k} - P_n| < \omega \cdot \varepsilon \quad \text{διὰ } n > N_0 \quad (1) \quad \eta$$

διαιροῦντες τὴν (1) διὰ $|P_n|$ θὰ ἔχωμεν:

$$\left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right| < \frac{\omega}{|P_n|} \cdot \varepsilon \quad \text{διὰ } n > N_0 \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $\frac{\omega}{|P_n|} < 1$, κατὰ μείζονα λόγον θὰ ἔχωμεν:

$$\left| \frac{P_{n+k}}{P_n} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{διὰ } n > N_0 \quad (3) \quad \eta$$

$$|(1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k}) - 1| < \varepsilon \quad \text{διὰ } n > N_0 \text{ καὶ } k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

(ἱκανόν). Ἐστω ὅτι ἰσχύει:

$$|(1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k}) - 1| < \varepsilon \quad (5)$$

Ἐάν λάβωμεν $\varepsilon = \frac{1}{2}$ εἰς τὴν σχέσιν (5) καὶ ἔστω

$$\tilde{P}_n = (1+c_{n_0+1}) \cdot (1+c_{n_0+2}) \cdots (1+c_n), \quad n > N_0 \quad (6)$$

τότε θὰ ἔχωμεν: $|\tilde{P}_n - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{διὰ } n > N_0 \quad (7)$

Ευ τῆς (7) λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{2} < \left| \tilde{p}_n \right| < \frac{3}{2} \quad (8)$$

Ευ τῆς (8) συμπεραίνομεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀκολουθία $\{\tilde{p}_n\}$, $n > N_0$ συγχλίνει πρὸς κάποιον ὅριο, τοῦτο δὲ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ὅθεν, καὶ ἡ ἀκολουθία $\{p_n\}$, $n \geq 1$ εἶναι φραγμένη, ἥτοι ὑπάρχει ἓνας $M > 0$ τοιοῦτος, ὥστε $|p_n| \leq M$ διὰ καθε n . Ἄν θεωρήσωμεν ἤδη ἓνα αὐθαίρετον $\varepsilon > 0$ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (5), δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\left| \frac{p_{n+k}}{p_n} - 1 \right| < \varepsilon \quad (9)$$

* Κατὰ συνέπειαν:

$$|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon \cdot |p_n| < \varepsilon \cdot M. \quad (10)$$

Ευ τῆς (10) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{p_n\}$ $n \geq 1$ πληροῖ τὸ κριτήριον τοῦ Cauchy καὶ ἐπειδὴ αὕτη ἔχει ἓνα ὅριον $\neq 0$, τὸ ἀπειροσχινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ δὲ συγχλίνει.

Πρότασις IX-1-2. Ἡ ἰσότης καὶ ἀναγκαῖα συνθήκη, ἵνα τὸ ἀπειροσχινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συγχλίνει, εἶναι ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς $\sum_{k=0}^{\infty} \log(1+c_k)$.

Ἀπόδειξις: (Ἰσχυρόν). Ἐστω $S_n = \sum_{k=0}^n \log(1+c_k)$ (1), τότε δὲ ἔχωμεν: $e^{S_n} = \prod_{k=0}^n (1+c_k)$ (2)

καὶ ἐπειδὴ ἡ ἐμμετρίκη συνάρτησις e^x εἶναι συνεχῆς, ἔπεται ὅτι ἡ σύγκλισις τῆς $S_n \rightarrow S$ τοῦ $n \uparrow \infty$ συνεπάγεται ὅτι καὶ ἡ $e^{S_n} \rightarrow e^S$ τοῦ $n \uparrow \infty$, δηλ. ἡ $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k) \rightarrow e^S$ τοῦ $n \uparrow \infty$ (3), ἥτοι τὸ $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συγχλίνει.

(Ἀναγκαῖον). Ἐστω ὅτι τὸ $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συγχλίνει, τότε συμφώνως πρὸς τὴν Πρότασιν IX-3-1 διὰ καθε $\varepsilon > 0$ καὶ < 1 δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν ἓν $N_0(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\left| (1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k}) - 1 \right| < \frac{1}{2} \varepsilon \quad (4) \text{ διὰ } n \geq N_0 \text{ καὶ } k \geq 1.$$

Ἐὰν $|z| < \frac{1}{2}$ $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δὲ ἔχωμεν ἐπίσης:

$$|\log(1+z)| < \varepsilon \quad (5),$$

διότι, ἐὰν $|z| < \frac{1}{2}$ καὶ ἀναπτύξωμεν κατὰ Taylor τὴν $\log(1+z)$, εὐρίσκομεν:

$$|\log(1+z)| \leq |z| + \frac{1}{2} |z|^2 + \cdots \leq |z| + |z|^2 + \cdots = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z| < 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \varepsilon\right) = \varepsilon.$$

Θέτουμε $z = (1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k}) - 1$ (6), παρατηρούμεν, λόγω της (4), ότι $|z| < \frac{1}{2}$ $\varepsilon < \frac{1}{2}$ και κατά συνέπειαν, λόγω της (5), θα έχωμεν:

$$|\log[(1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k})]| = |\log(1+z)| < \varepsilon \quad (7)$$

Η (7) γράφεται:

$$|\log(1+c_{n+1}) + \log(1+c_{n+2}) + \cdots + \log(1+c_{n+k}) + 2q\pi i| < \varepsilon \quad (8) \quad (\text{βλ. σχετ. θεώρημα II-5-2}).$$

Άρκει λοιπόν ν' αποδείξωμεν ότι $q=0$.

Διά $k=1$ και $n \geq N_0$ έχομεν:

$$|\log(1+c_{n+1}) + 2q\pi i| < \varepsilon \quad (9)$$

Ήνα ισχύη η (9) άρκει νά είναι $q=0$.

Διά $k=2$ και $n \geq N_0$ έχομεν:

$$|\log(1+c_{n+1}) + \log(1+c_{n+2}) + 2q\pi i| < \varepsilon \quad (10)$$

Επειδή έυαστος των δύο πρώτων όρων του άριστερου μέλους της (10) έχει μέτρον $< \varepsilon$ και επειδή όλοκληρον τό άθροισμα πρέπει νά έχη μέτρον $< \varepsilon$, συμπεραίνομεν ότι θα πρέπει νά είναι $q=0$. Συνεχίζοντες κατ' αυτόν τον τρόπον αποδεικνύομεν ότι θα πρέπει νά έχωμεν $q=0$ διά κάθε $k \geq 1$.

Η (8) λοιπόν γράφεται:

$$|\log(1+c_{n+1}) + \log(1+c_{n+2}) + \cdots + \log(1+c_{n+k})| < \varepsilon \quad \text{διά } n \geq N_0 \quad (11)$$

ήτοι πληρούται τό κριτήριο του Cauchy διά την σειράν $\sum_{k=0}^{\infty} \log(1+c_k)$ και κατά συνέπειαν αύτη συγχλίνει.

Όρισμός IX-3-2. Τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ θα λέγωμεν ότι συγχλίνει άπολύτως, εάν τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+|c_k|)$ συγχλίνη.

Πρότασις IX-1-3. Η απόλυτος σύχλησις του $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συνεπάγεται την σύχλησιν αυτού.

Απόδειξις: Λαμβάνοντες υπ' όψιν την άνισότητα:

$$|(1+c_{n+1}) \cdot (1+c_{n+2}) \cdots (1+c_{n+k}) - 1| \leq (1+|c_{n+1}|) \cdot (1+|c_{n+2}|) \cdots (1+|c_{n+k}|) - 1$$

και την Πρότασιν IX-3-1 έχομεν τό συμπέρασμα.

Πρόταση IX-3-4. Τό άπειρογινόμενο $\prod_{k=0}^{\infty} (1+c_k)$ συγκλίνει απόλυτως, εάν ή σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει απόλυτως.

Άποδείξεις: (Ήλιανόν) "Εστω ότι ή σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει απόλυτως. Έντεϋ-
θεν $c_k \rightarrow 0$ του $k \uparrow \infty$ καί ως έϋ τούτου από κάποια τιμή του k καί μετά
θά έχωμεν: $|c_k| < \frac{1}{2}$.

Είλναι δέ:

$$\left| 1 - \frac{\log(1+c_k)}{c_k} \right| = \left| \frac{1}{2} c_k - \frac{1}{3} c_k^2 + \dots \right| \leq \frac{1}{2} (|c_k| + |c_k|^2 + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|c_k|}{1-|c_k|} \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Έϋ της σχέσεως (1) εύκολως συνάχουμεν ότι:

$$\frac{1}{2} |c_k| \leq |\log(1+c_k)| \leq \frac{3}{2} |c_k| \quad (2)$$

Η (2) άποδεικνύει ότι, ή σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |\log(1+c_k)|$ συγκλίνει, εάν καί μόνον, εάν ή
σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει απόλυτως. Έπειδή ή (2) παραμένει άληθής, εάν αντι-
καταστήσωμεν τό c_k υπό του $|c_k|$, συμπεραίνουμεν, συμφώνως προς την Πρό-
τασιν IX-3-2, ότι τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=0}^{\infty} (1+|c_k|)$ συγκλίνει (απόλυτος σύγκλις),
εάν καί μόνον, εάν ή σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ συγκλίνει.

Όμαλή σύγκλις άπειρογινόμενου.

Θεωρούμεν την άμολουδίαν των συναρτήσεων:

$$f_0(z), f_1(z), f_2(z), \dots$$

όπου έλάστησινάρτησειςείναι ώρισμένη διά κάθε z ενός συνόλου $G \subset \mathbb{C}$.

Υποθέτομεν ότι τό άπειρογινόμενον:

$$\prod_{k=0}^{\infty} \{1+f_k(z)\} \quad (1)$$

συγκλίνει διά κάθε $z \in G$. Εάν ή άμολουδία:

$$F_n(z) = \prod_{k=0}^n \{1+f_k(z)\} \quad (2)$$

συγκλίνει όμαλώς έντός του G , δηλ. εάν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ύπάρχη ένας άμέραιος $N(\varepsilon)$
ό όποιος έξαρτάται μόνον έϋ του ε καί ούχι από την ειόιτην τιμήν του z έντός του
 G τοιοϋτος, ώστε νά έχωμεν: $|F_n(z) - F(z)| < \varepsilon$ δι' όλα τά $n \geq N(\varepsilon)$, τότε θά λέγωμεν
ότι τό άπειρογινόμενον (1) συγκλίνει όμαλώς έντός του G .

Θεώρημα IX-3-1. Εάν εντός του χωρίου G είναι $f_k(z) \neq -1$ διά πάδε k και εάν υπάρχει μία σταθερά M_k τοιαύτη, ώστε να έχωμεν $|f_k(z)| \leq M_k$ διά πάδε k και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγυλίνη, τότε τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty} [1+f_k(z)]$ συγυλίνει απόλυτως και όμαλώς εντός του G .

Απόδειξις: Θετομεν: $F_n(z) = \prod_{k=1}^n [1+f_k(z)]$ και $P_n = \prod_{k=1}^n (1+M_k)$

Τότε $F_n - F_{n-1} = (1+f_1(z))(1+f_2(z)) \cdots (1+f_{n-1}(z)) f_n(z)$

και $P_n - P_{n-1} = (1+M_1) \cdots (1+M_{n-1}) \cdot M_n \geq 0$.

Οθεν, λόγω της ύποθέσεως, θα έχωμεν:

$$|F_n(z) - F_{n-1}(z)| \leq P_n - P_{n-1} \quad (1)$$

Είναι όμως, $F_n(z) = \sum_{k=1}^n (F_k(z) - F_{k-1}(z))$ και $P_n = \sum_{k=1}^n (P_k - P_{k-1})$, εάν φυσικά όρίσωμεν: $F_0(z) = P_0 = 0$. Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγυλίνει, κατά την Πρότασιν IX-3-4, και τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty} (1+M_k)$ συγυλίνει, συνεπώς υπάρχει τό $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ δηλ. η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (P_k - P_{k-1})$ συγυλίνει και ως έυ τούτου, λόγω της (1) και του κριτηρίου του Weierstrass (βλ. Θεώρημα VII-4-2) και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (F_k(z) - F_{k-1}(z))$ συγυλίνει απόλυτως και όμαλώς διά πάδε $z \in G$. Τό τελευταίον σημαίνει ότι η άμολουδία των συναρτήσεων $\{F_n(z)\}_{n \geq 1}$ συγυλίνει όμαλώς διά πάδε $z \in G$, δηλ. τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty} (1+f_k(z))$ συγυλίνει όμαλώς εντός του G .

Ευόλως αποδεικνύονται και αι κάτωθι προτάσεις:

Πρότασις IX-3-5. Εάν αι συναρτήσεις $f_k(z)$ είναι συνεχείς εντός του G διά πάδε k και εάν τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty} (1+f_k(z))$ συγυλίνη όμαλώς εντός του G προς την $f(z)$, τότε η $f(z)$ είναι συνεχής εντός του G .

Πρότασις IX-3-6. Εάν αι συναρτήσεις $f_k(z)$ είναι αναλυτικαι εντός του G διά πάδε k και εάν τό άπειρογινόμενον $\prod_{k=1}^{\infty} (1+f_k(z))$ συγυλίνη όμαλώς προς την $f(z)$ διά πάδε συμπαχές ύποσύνολον του G , τότε η $f(z)$ είναι αναλυτική εντός του G .

Πρότασις IX-3-7. (λογαριθμική παράγωγος του γινομένου) Εάν $\{f_k(z)\}_{k \geq 0}$,

είναι μία ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων εντός του χωρίου G και η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ συγχλίνει ομαλώς εντός του G προς μία φραγμένη συνάρτηση, τότε (ως γνωστόν) το άπειρογινόμενο $\prod_{k=0}^{\infty} (1+f_k(z))$ συγχλίνει ομαλώς και απόλυτως προς μία αναλυτική συνάρτηση $F(z)$ εντός του G . Εάν επί πλέον είναι $F(z) \neq 0$ διά υάδε $z \in G$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1+f_k(z)} \quad (1)$$

Απόδειξεις: Επειδή $F(z) \neq 0$ έπεται ότι σφδείς των παραγόντων $1+f_k(z)$ είναι μηδέν. Η ακολουθία $F_n(z) = \prod_{k=0}^n \{1+f_k(z)\}$ συγχλίνει ομαλώς προς την συνάρτηση $F(z)$, όθεν υατά τό θεώρημα VII-4-4 και η ακολουθία $\{F'_n(z)\}_{n \geq 1}$ συγχλίνει ομαλώς προς την συνάρτηση $F'(z)$ και υατά συνέπεια:

$$\frac{F'_n(z)}{F_n(z)} \rightarrow \frac{F'(z)}{F(z)} \quad \text{του } n \uparrow \infty \quad (2)$$

Άλλά:

$$\frac{F'_n(z)}{F_n(z)} = \sum_{k=0}^n \frac{f'_k(z)}{1+f_k(z)} \quad (3)$$

Ευ των (2) και (3) λαμβάνομεν τελικώς διά $n \uparrow \infty$.

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F'_n(z)}{F_n(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f'_k(z)}{1+f_k(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f'_k(z)}{1+f_k(z)}$$

§4. ΑΚΕΡΑΙΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Καλούμεν άιεραίαν συνάρτησην ατή που είναι αναλυτική εις όλούληρον τό μιχαδιόν επίπεδον. Τό σημείον $z = \infty$ είναι ένα ιδιαίσον σημείον διά μίαν άιεραίαν συνάρτησην, έυτός εάν ατή είναι σταθερά.

Κάθε άιεραία συνάρτησις $F(z)$ δύναται νά παρασταθῇ υπό μιᾶς δυναμοσειράς, ήτοι:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (1)$$

μέ ατῖνα συγχλίσεως άπειρον.

Η σειρά (1) προσδιορίζει την τιμήν της συναρτήσεως $F(z)$ διά υάδε πεπερασμένον z . Ούτω, συμφώνως προς τ' άνωτέρω, ή άιεραία συνάρτησις δύναται

νά θεωρηθῇ ὅτι ἔχει τὴν ἀπλουστάτην ματασυστην ἐξ ὀρίων τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Τὰ πολυώνυμα ἀποτελοῦν μίαν εἰδικὴν ματηγορίαν ἀνεραίων συναρτήσεων.

Ἀνεραῖαι συναρτήσεις ποὺ δὲν εἶναι πολυώνυμα μαλοῦνται ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις. Αὗται δύνανται νά χαρακτηρισθοῦν ἐν τῆς ιδιότητος ὅτι ἡ σειρά τοῦ Ταυλοτ αὐτῶν ἔχει ἀπείρους συντελεστές $\neq 0$. Προφανῶς καὶδε ἀνεραία συνάρτησις εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

Ἐστω $F(z)$ μία ἀνεραία συνάρτησις. Τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν της δύναται νά εἶναι πεπερασμένο ἢ καὶ ἀπείρο. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ σύνολον τῶν ριζῶν δὲν δύναται νά ἔχη ἓνα πεπερασμένον σημεῖον συσσωρεύσεως, ἐντὸς ἐάν ἡ συνάρτησις ἰσοῦται πρὸς μηδέν.

Συνεπῶς, ἐάν μία ἀνεραία συνάρτησις ἔχη ἓνα ἀπείρον πλῆθος ριζῶν καὶ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, τότε αἱ ρίζαι δύνανται νά τοποθετηθοῦν κατὰ μίαν ἀμοιουθλίαν $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ τείνουσα πρὸς τὸ ἀπείρον.

Π.χ. δυνάμεθα νά τὰς τοποθετήσωμεν κατὰ αὐξουσας ἀπόλυτον τιμὴν, ἥτοι: $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$, ὅπου $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$.

Ἐστω τὸ ἀνεραῖον πολυώνυμον:

$$f(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n, C_0 \neq 0, n > 0 \quad (1)$$

τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, ἔχει n -ρίζας, ἔστω τὰς a_1, a_2, \dots, a_n καὶ ὡς ἐν τούτῳ δύναται νά γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν:

$$f(z) = C_0 (z - a_1) \cdot (z - a_2) \cdot \dots \cdot (z - a_n) \quad (2)$$

ἢ καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν:

$$f(z) = C_n \left(1 - \frac{z}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{z}{a_n}\right), C_n \neq 0 \quad (3)$$

Ἡδὴ τίθεται τὸ ἐξῆς πρόβλημα:

Ἐάν εἶναι δυνατόν νά εὑρωμεν μίαν ἀνεραίαν συνάρτησιν ἔχουσα μηδενίσαντας (ρίζας) δεδομένους ἀριθμούς καὶ νά ἐμφράσωμεν αὐτὴν (τὴν συνάρτησιν) ὑπὸ μορφὴν ἑνός ἀπειροσχινομένου.

Κατ' ἀρχὰς παρτηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν ἀνεραῖαι συναρτήσεις ἄνευ ριζῶν, π.χ. ἡ e^z , γεννιώτερον δὲ ἡ $e^{q(z)}$, ὅπου $q(z)$ παριστᾷ μίαν ἀνεραίαν συνάρτησιν.

• Ἀπάντησιν εἰς τὸ τεθέν ἀνωτέρω πρόβλημα δίδει τὸ πόρισμα IX-4-1.

Ἀποδεικνύομεν προηγουμένως τὴν ἐξῆς πρότασιν.

Πρόταση IX-4-1. Εάν $q(z)$ είναι μία άεραία συνάρτησις ή οποία δεν έχει μηδενίζοντας, αυτή δύναται να τεθῇ υπό τὴν μορφήν $e^{\varphi(z)}$, όπου $\varphi(z)$ είναι άεραία συνάρτησις.

Απόδειξις: Ἡ συνάρτησις $\frac{q'(z)}{q(z)}$ είναι ὁλοκληρώσιμος.

Ὁλοκληροῦντες δὲ ταύτην κατὰ μήκος ἑνός τυχόντος δρόμου ἀπὸ 0 ἕως z λαμβάνομεν :

$$\varphi(z) = \log q(0) + \int_0^z \frac{q'(\gamma)}{q(\gamma)} d\gamma \quad (1),$$

ἢ ὁποία είναι ἐπίσης άεραία συνάρτησις.

Εἶναι δέ, $\varphi(0) = \log q(0)$ ἢ $q(0) = e^{\varphi(0)}$.

Διὰ παραγωγίσεως τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$\varphi'(z) = \frac{q'(z)}{q(z)} \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ λογαριθμιυή παράγωγος τῆς $\frac{e^{\varphi(z)}}{q(z)}$ είναι :

$$\varphi'(z) - \frac{q'(z)}{q(z)} = 0 \quad (\text{λόγω τῆς (2)})$$

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις $\frac{e^{\varphi(z)}}{q(z)}$ δά πρέπει νά είναι σταθερά καὶ ὡς ἐν τούτῳ:

$$\frac{e^{\varphi(z)}}{q(z)} = \frac{e^{\varphi(0)}}{q(0)} = 1 \quad (3)$$

Ἄρα, $q(z) = e^{\varphi(z)}$.

Ἐν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἔπεται τὸ ἀνύλουθον :

Πόρισμα IX-4-1. Εάν ἡ $q(z)$ είναι μία άεραία συνάρτησις μέ ἕνα πεπερασμένον ἀριθμόν μηδενίζόντων(ριδών) καὶ εάν $P(z)$ είναι ἕνα πολυώνυμον τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς αὐτὰς ρίδας μέ τὴν $q(z)$ καὶ ἐυάστην μέ τόν αὐτόν βαθμόν πολυαπλότητος, τότε

$$q(z) = P(z) \cdot e^{\varphi(z)}$$

Απόδειξις: Αὐτὸ ἔπεται ἀμέσως ἐν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, εἰάν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $\frac{q(z)}{P(z)}$, ἢ ὁποία είναι άεραία συνάρτησις ἄνευ ριδών.

Ἐφαρμόζοντες ὁμοίως τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἔχομεν τὸ κατωδί :

Πόρισμα IX-4-2. Εάν οι συναρτήσεις $g(z)$ και $h(z)$ είναι άεραϊαι και έχουν τους αυτούς μηδενίζοντας (ρίζας) και με την αυτήν τάξιν πολλαπλότητας, τότε

$$g(z) = h(z) e^{q(z)},$$

όπου $q(z)$ είναι άεραϊα συνάρτησις.

§5. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΜΙΑΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΕΙΣ ΕΝΑ ΑΠΕΙΡΟΓΟΝΟΜΕΝΟΝ

(θεώρημα του Weierstrass).

I. Υποθέτομεν ότι η $f(z)$ έχει την ρίζαν $z=0$ πολλαπλότητας m (m : δύναται να είναι και μηδέν) και τας ρίζας a_1, a_2, \dots, a_n (τυχόν πολλαπλαί ρίζαι επαναλαμβάνονται τόσας φορές όσας δηλοῖ η πολλαπλότης των). Τότε η $f(z)$ δύναται να γραφῇ ὑπό τὴν μορφήν:

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^n \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad (1)$$

όπου $g(z)$ άεραϊα συνάρτησις.

Τό άνωτέρω συμπέρασμα δύναται να γενιευδῇ.

II. Θεώρημα IX-5-1. Υποθέτομεν ότι η $f(z)$ έχει τας ρίζας $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ και ἐπὶ πλεόν $a_n \neq 0, n=1, 2, 3, \dots$ και είναι τοιαῦται, ὥστε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ και ὅτι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ συγχλίνει, τότε:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad (2)$$

όπου $g(z)$ άεραϊα συνάρτησις.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ συγχλίνει, ἔπεται ὅτι και τό άπειρογινόμενον $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$, κατὰ τό θεώρημα IX-3-1, συγχλίνει και μάλιστα άπολύτως και ὁμαλῶς πρὸς μίαν άεραϊαν συνάρτησιν $h(z)$, ἥτοι:

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

και η ὁποία έχει τὰ σημεῖα $a_n, n=1, 2, \dots$ ὡς ρίζας και μάλιστα άπλῶς.

Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν Πρότασιν IX-4-1 διὰ τὰς συναρτήσεις $f(z)$ καὶ $h(z)$ ἔχωμεν:

$$f(z) = e^{q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

ὅπου $q(z)$ ἀνεραία συνάρτησις.

Παρατήρησις: Μὲ τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ καὶ τὴν ρίζαν $z=0$ μὲ βαθμὸν πολλαπλότητας m , τότε ἡ $f(z)$ γράφεται:

$$f(z) = z^m \cdot e^{q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \quad (2')$$

III. Θεώρημα IX-5-2. (Weierstrass). Ἐστω $a_n, n=1, 2, \dots$ εἶναι μία ἀποθου-
δια μιγαδικοῦ ἀριθμῶν μὲ $a_n \neq 0$ καὶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Κάθε ἀνεραία συνάρ-
τησις $f(z)$ μὲ ρίζας μόνον τοὺς ἀριθμοὺς a_n καὶ οὐχὶ ἄλλας δύναται νὰ
γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(z) = e^{q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} \quad (1)$$

ὅπου τὸ γινόμενον ἐλήφθη δι' ὅλα τὰ $a_n \neq 0$ καὶ k_n εἶναι ὠρισμένοι ἀνε-
ραιοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1} \quad (2)$ νὰ συγκλίνει δι' ὅλα τὰ z
καὶ $q(z)$ εἶναι μία ἀνεραία συνάρτησις.

Παρατήρησις: Μὲ τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχῃ
τὴν ρίζαν $z=0$ μὲ βαθμὸν πολλαπλότητας m , τότε ἡ $f(z)$ δύναται νὰ τεθῇ
ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(z) = z^m \cdot e^{q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}} \quad (1')$$

Προειμμένου ν' ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα θὰ στηριχθῶμεν εἰς τὰ κατωθι
λήμματα:

Λήμμα IX-5-1. Ἐὰν $a_n \neq 0$ διὰ $n=1, 2, 3, \dots$ καὶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, τότε ὑπάρχει μία ἀπο-
θουδια $\{k_n\}, n \geq 1$ μὴ ἀρνητικῶν ἀνεραίων τοιαύτη, ὥστε ἡ σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n} \quad (3)$$

νά συγκλινην ὁμαλῶς εἰς τὴν ἀνὰ δὲ κύκλον $k(0, R)$, $R < \infty$.

Ἀπόδειξις: Ἀρμεῖ, π.χ, νά θεώσωμεν $k_n = n-1$. Πράγματι ἐπειδὴ $|a_n| \geq 2R$ διὰ n ἀρμούντως μεγάλο, τότε δι' ὅλα αὐτὰ τὰ n καὶ διὰ $|z| \leq R$ θὰ ἔχωμεν:

$$\left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} = \left| \frac{z}{a^n} \right|^n \leq \left(\frac{R}{2R} \right)^n = \frac{1}{2^n},$$

τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει τὴν ὁμαλήν σύγκλισιν τῆς (3).

Ἀπολοῦθως εἰσάγωμεν τὴν συνάρτησιν:

$$E_k(z) = (1-z) \cdot \exp \left\{ z + \frac{1}{2} z^2 + \dots + \frac{1}{k} z^k \right\}, \quad (4) \quad \text{ὅπου } k=1, 2, 3, \dots$$

Ἐπὶ πλεον δεχόμεθα: $E_0(z) = 1-z$.

Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἔχει μόνον μίαν ρίζαν τὸ σημεῖον $z=1$, ἐνῶ διὰ $z=0$ ἔχομεν: $E_k(0) = 1$.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος αὐσιώδη ρόλο θὰ παίξῃ καὶ τὸ κατωθί:

Λήμμα IX-5-2. Διὰ τὴν ὀριοθεῖσαν συνάρτησιν $E_k(z)$ ἔχομεν: $|E_k(z)-1| \leq 3|z|^{k+1}$ (5)
διὰ $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Ἀπόδειξις: Διὰ $k=0$ ἡ ἀνισότης εἶναι προφανής. Ἐὰν ἤδη $k \geq 1$ καὶ $|z| < 1$, ἔχομεν: $1-z = \exp \log(1-z) = \exp \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots \right)$.

Συνεπῶς, $E_k(z) = \exp q_k(z)$, ὅπου $q_k(z) = - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Ὅθεν, ἐὰν ὑποθέσωμεν ἐπὶ πλέον ὅτι $|z| \leq \frac{1}{2}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$|q_k(z)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|^{k+1}}{1-|z|} \leq |z|^{k+1} \quad (6)$$

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ἀνισότητος (1) θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς κατωθι δύο ἀνισότητας:

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1, \quad e^x - 1 \leq x e^x \quad (7)$$

ὅπου z παριστᾷ ἑναντιχόντα μιγαδικὸν ἀριθμὸν καὶ x ἕναν τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς πρώτης π.χ, τούτων ἀρμεῖ ν' ἀναπτύξωμεν κατὰ Ταιλορ τὴν $e^z - 1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ νά λάβωμεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς.

Ἀπολοῦθως, λόγῳ τῶν (6) καὶ (7), λαμβάνομεν:

$$|E_k(z)-1| = |e^{q_k(z)}-1| \leq e^{|q_k(z)|} - 1 \leq |q_k(z)| e^{|q_k(z)|} \leq |z|^{k+1} \cdot e^{|z|^{k+1}} \leq 3|z|^{k+1},$$

ἐπειδὴ $e^{|z|^{k+1}} < e < 3$, διὰ $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Ἀπόδειξις (τοῦ θεωρήματος) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν § 4 ἀρυεῖ ν' ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ παράγων τοῦ $e^{g(z)}$ εἰς τὴν σχέσιν (1) τοῦ θεωρήματος IX-5-2 παριστᾷ μίαν ἀνεραίαν συνάρτησιν μὲ τὰς καθορισμένας ρίζας. λαμβάνοντες ἐπίσης ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (4) τὴν ὀρίζουσα τὴν συνάρτησιν $E_k(z)$ δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν αὐτὸν τὸν παράγοντα οὕτω:

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (8)$$

$$\text{Εἶναι ὅμως, } E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) = 1 + \left\{ E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right\} \quad (9)$$

τὸ ἀπειροχινόμενον (8) διὰ νὰ συγχλίνῃ ὁμαλῶς εἰς τὸ (ἀνοιχτόν) μιγαδικὸν ἐπίπεδον πρὸς μίαν ἀνεραίαν συνάρτησιν, πρέπει ἡ σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| E_{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right| \quad (10),$$

νὰ συγχλίνῃ ὁμαλῶς εἰς καθε ἀνοιχτόν κύκλον $k(0, R)$.

Ἦδὴ, ἐάν $|z| \leq R$, τότε δι' ὅλα τὰ n τὰ μεγαλύτερα ἢ ἴσα ἀπὸ ἑνὸς ὁρισμένου n_0 ἔχωμεν $\left| \frac{z}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2}$. Ἀπολοῦδως ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνισότητα (5) τοῦ λήμματος IX-5-2 παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ $n \geq n_0$ οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (10) δὲ εἶναι μικρότεροι ἢ ἴσοι ἀπὸ τοὺς ὅρους $3 \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k_n+1}$. Οὕτω ἀρυεῖ νὰ δειχθῇ ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k_n+1}$ καὶ ἡ ὁποία βάσει τοῦ λήμματος IX-5-1 συγχλίνει ὁμαλῶς διὰ $|z| \leq R$. Τὸ ὅτι ἡ συνάρτησις ἡ ὀρισμένη ὑπὸ τῆς (8) ἔχει τὰς προκαθορισμένας ρίζας εἶναι προφανές. Βάσει δὲ τοῦ Πορίσματος IX-4-2 διὰ τὴν ζητούμενην συνάρτησιν $f(z)$ δὲ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$f(z) = e^{g(z)} \cdot \varphi(z),$$

ὅπου $g(z)$ τυχούσα ἀνεραία συνάρτησις.

Τὸ θεώρημα ὁδὲν ἀπεδείχθη πλήρως.

Παρατήρησις Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τοῦ Weierstrass παῖσει ἕναν βασιυόν ρόλον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀνεραίων συναρτήσεων. Εἶναι ἀνάλογον τοῦ θεωρήματος τοῦ D'Alembert τῆς ἀναλύσεως ἑνὸς πολυωνύμου εἰς γινόμενον γραμμικῶν παραγόντων.

*Αξίον προσοχής είναι, ότι η ανάλυσις (1) ή (1') δέν είναι μονοσήμαντος, έπει-
δή η ακολουθία $\{k_n\}$ δύναται νά έυλεχθῇ κατά ποικίλους τρόπους.

Είδιυώς ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση, όταν δυνάμεθα νά λάβωμεν διά
τήν $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ τόν αὐτόν ἀριθμόν k . Αυτό θά συμβαίη όταν ἡ σειρά
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ είναι συγυλίνουσα. Ὁ παράγωγ $E_{k_n}(\frac{z}{a_n})$ υαλεῖται *στοιχειώδης παρά-
γωγ* καί ἡ ανάλυσις αὕτη υαλεῖται *ανάλυσις μιᾶς ἀμεραίας συναρτήσεως εἰς
στοιχειώδεις παράγοντας*.

Κανονιυά γινόμενα:

Συμφώνως πρὸς τ'άνωτέρω, εάν ἡ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ είναι συγυλίνουσα, ὁ ἐλά-
χιστος μὴ ἀρνητιυός ἀμέραιος k υαλεῖται *βαθμός* τῆς ακολουθίας $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
καί ἔπισης *βαθμός* τοῦ ἀντιστοιχίου *κανονιυοῦ γινόμενου* (1) ἢ (1'). Ἐπὶ τοῦ
προειμμένου ᾗς λάβωμεν τό γινόμενον (1'), ὅτε τοῦτο γράφεται ὑπό τήν μορφήν:

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right\}} \quad (11)$$

ὅπου m παριστᾷ τήν τάειν πολλαπλότητος τῆς ρίσης (εάν ὑπάρχη) $z=0$ τῆς $f(z)$.

Τό ἀπειρογινόμενον λοιπόν (11) συγυλίνει ἀπολύτως καί ὁμαλῶς ἐπὶ παντός
φραγμένου συνόλου καί μηδενίζεται εἰς τὰ σημεῖα $z=0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, ὁ δέ
παράγωγ z^m παραλείπεται, εάν ἡ $f(z)$ δέν ἔχει ρίζαν τόν ἀριθμόν $z=0$. λαμβάνον-
τες δέ τήν λογαριθμιυήν παράγωγον τῆς (11), συμφώνως πρὸς τόν τύπον τῆς
προτάσεως IX-3-7, εὔρισυομεν:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{m}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \dots + \frac{z^{k-1}}{a_n^k} \right\} \quad (12)$$

Ἡ σειρά τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (12) συγυλίνει ὁμαλῶς εἰς καθε υλειστόν καί
φραγμένον σύνολον, τό ὁποῖον δέν περιέχει τὰς ρίζας τῆς $f(z)$.

§ 6. ΠΑΡΑΓΩΓΗΤΟΠΟΙΗΣΙΣ ΤΗΣ $f(z) = \eta\mu\pi z$.

Θεωρῶμεν τήν συνάρτησιν $f(z) = \eta\mu\pi z$. Αὕτη είναι μία ἀμεραία συνάρτησις, ἡ

ὅποια μηδενίζεται εἰς τὰ σημεῖα $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ καὶ ἐπειδὴ ἡ σειρά :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (1)$$

(ὁ τόνος εἰς τὸ \sum δηλοῖ ὅτι εἰς τὸ ἀριστερόν μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ὁ ὅρος διὰ $n=0$ παραλείπεται) εἶναι συγχυθίνουσα, ὁ βαθμὸς τῆς ἀυτολυσθίας τῶν ριζῶν τῆς $\eta\mu\pi z$ εἶναι $k=1$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, λόγῳ τοῦ τύπου (11):

$$\eta\mu\pi z = e^{q(z)} z \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad (2)$$

Συσχετίζοντες ἀνά δύο τοὺς παράγοντας τοῦ ἀνωτέρω γινομένου καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ εὐδετιμὸν μέρος αὐτοῦ εἶναι μηδέν, διότι οἱ ὅροι τοῦ εὐθέτου ἀνά δύο εἶναι ἀντίθετοι, λαμβάνομεν:

$$\eta\mu\pi z = e^{q(z)} z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (3)$$

Ἡ μόνη δυσωομία εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τῆς συναρτήσεως $q(z)$. Λαμβάνοντες τὴν λογαριθμικὴν παράγωγον τῆς (3) εὐρίσκουμεν:

$$\pi \cdot \sigma\phi\pi z = q'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (4)$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι γνωστὸν (βλ. § 2, II, τύπος (8)) ὅτι :

$$\pi \cdot \sigma\phi\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (5)$$

Ἐν τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν : $q'(z) = 0$, ἐξ ἧς $q(z) = C$.

Ὁ τύπος λοιπὸν (3) γίνεται :

$$\eta\mu\pi z = C \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (6)$$

Ἐν τῆς (6) λαμβάνομεν:

$$\frac{\eta\mu\pi z}{z} = C \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (6')$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (6') διὰ $z \rightarrow 0$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\pi z}{z} = \pi$, εὐρίσκουμεν $C = \pi$.

Οὕτω ὁ (6) γράφεται :

$$\eta\mu\pi z = \pi \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (7) \quad \text{τύπος του Euler}$$

Έπανερχόμενοι εἰς τὸν τύπον (2) καὶ θέτοντες $e^{g(z)} = \pi$ εὐρίσκουμεν τὸν τύπον

$$\eta\mu\pi z = \pi \cdot z \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot e^{\frac{z}{n}} \quad (8) \quad \text{τύπος του Weierstrass}$$

Θέτοντες $z = \frac{1}{2}$ εἰς τὸν τύπον (7) εὐρίσκουμεν :

$$1 = \frac{1}{2} \pi \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{2} \pi \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - 1}{4n^2}$$

καὶ κατ' ἀμοιβαίαν ἔχομεν τὸν σπουδαῖον τύπον τοῦ Wallis, ἥτοι :

$$\frac{1}{2} \pi = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \quad (9) \quad \text{τύπος του Wallis}$$

§ 7. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ Γ.

Ἡ συνάρτησις $\eta\mu\pi z$ ἔχει ὡς ρίζας ὅλους τοὺς ἀκεραίους καὶ εἶναι ἡ ἀπλουστάτη συνάρτησις πού ἔχει αὐτὴν τὴν ιδιότητα. Ἦδη δὲ εἰσαγάγωμεν συναρτήσεαι ὁποῖαι ἔχουν μόνον θετικoὺς ἢ μόνον ἀρνητικoὺς ἀκεραίους ὡς ρίζας. Ἡ ἀπλουστάτη συνάρτησις ἡ ὁποία ἔχει ἀρνητικoὺς ἀκεραίους ὡς ρίζας εἶναι ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ κανονικόν γινόμενον, ἥτις :

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot e^{-\frac{z}{n}} \quad (1)$$

Εὐνόλως διαπιστοῦται ὅτι ἡ συνάρτησις $G(-z)$ ἔχει τότε τοὺς θετικoὺς ἀκεραίους ὡς ρίζας καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (7) τῆς § 6 τὸν διδοντα τὴν παραχρηστοποίησιν τοῦ $\eta\mu\pi z$ εὐρίσκουμεν :

$$z \cdot G(z) \cdot G(-z) = \frac{\eta\mu\pi z}{\pi} \quad (2)$$

Ἐνεκα τοῦ τρόπου κατασκευῆς τῆς $G(z)$ αὕτη εἶναι ἀναγκασμένη νὰ ὑπακούῃ εἰς ὠρισμένας ιδιότητες. Οὕτω παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $G(z-1)$ ἔχει τὰς αὐτὰς ρίζας μέ τὴν $G(z)$ καὶ ἐπὶ πλεόν δὲ αὕτη ἔχει καὶ τὴν ρίζαν $z=0$.

Ὡς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$G(z-1) = z \cdot e^{g(z)} \cdot G(z) \quad (3)$$

όπου ή $\gamma(z)$ είναι μία άεραία συνάρτησις.

Προειμμένου δέ νά προσδιορίσωμεν τήν $\gamma(z)$ λαμβάνομεν τās λογαριθμίας παραγώγους άμφοτέρων τών μελών τής (3), ότε έχομεν:

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \frac{G'(z)}{G(z)} \quad (4) \quad \text{ή}$$

$$\frac{d \log G(z-1)}{dz} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \frac{d \log G(z)}{dz}$$

$$\text{Είναι δέ, } \log G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot e^{-\frac{z}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right\}$$

$$\text{ότε} \quad \frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{d \log G(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right\}$$

$$\text{Ομοίως, } \frac{G'(z-1)}{G(z-1)} = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right\}$$

Επομένως ό τύπος (4) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right\} \quad (5)$$

Είς τήν σειράν του άριστερου μέλους τής (5) δυνάμεθα νά άντιμταστήσωμεν τό η υπό του η+1, ότε αύτη γράφεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+\eta} - \frac{1}{\eta} \right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+\eta} - \frac{1}{\eta+1} \right) = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+\eta} - \frac{1}{\eta} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta+1} \right)$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta+1} \right) = 1$ και κατά συνέπειαν ή σχέσις (5) μετά τās άντιμταστάσεις και τās άναγωγάς γίνεται: $\gamma'(z) = 0$, έξ τής $\gamma(z) = \text{σταδ.}$ και τήν όποιαν παριστῶμεν διά του γράμματος γ. Ούτω ή σχέσις (3) γίνεται:

$$G(z-1) = e^{\gamma} \cdot z \cdot G(z) \quad (6)$$

Ο προσδιορισμός τής σταθεράς γ ή όποία μαθεΐται και σταθερά του Euler γίνεται ως άκολούθως:

Θέτοντες $z=1$ λαμβάνομεν έν τής (6)

$$1 = G(0) = e^{\gamma} G(1).$$

$$\text{Συνεπῶς } e^{-\gamma} = G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot e^{-\frac{1}{n}} \quad (7)$$

Λαμβάνοντας τους λογαρίθμους της (7) εύρισκουμε:

$$-\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1} + \log \frac{n+1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \right\}$$

και επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{n} = 0$ έχουμε:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \quad (8)$$

Ευλόγως διαπιστώνεται ότι: $0 < \gamma < 1$, είναι δέ περίπου: $\gamma = 0,57722 \dots$

Ας θεωρήσουμε ήδη την συνάρτηση:

$$H(z) = G(z) \cdot e^{z^2} \quad (9)$$

η οποία επαληθεύει την συναρτησιακήν εξίσωσιν $H(z-1) = z H(z)$ (10)

Παρατηρούμεν ότι και η συνάρτησις:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot H(z) \quad (11)$$

ικανοποιεί την εξίσωσιν:

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1} \quad \text{ή την εξίσωσιν}$$

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \quad (12)$$

Διά διαδοχικών εφαρμογών του τύπου (12) λαμβάνομεν:

$$\Gamma(z+n) = z(z+1) \cdots (z+n-1) \cdot \Gamma(z) \quad (12')$$

Η σχέση (12) είναι λίαν χρήσιμος και η συνάρτησις (11), ως ώρισθη ανωτέρω, επαληθεύει αυτήν. Η υπό της (11) ορισμένη συνάρτησις καλείται **συνάρτησις γάμμα του Euler** και συμβολίζεται με τό φερώνυμου γράμμα Γ . Πολλάκις η σχέση (12) λαμβάνεται διά να όρίσωμεν μέσωσ αυτής την συνάρτησιν Γ .

Λαμβάνοντες υπ' όψιν τας σχέσεις (9) και (11) καθώς και την (1) εύρισκόμεν την κάτωθι έκφρασιν της συναρτήσεως Γ :

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}} \quad (13)$$

Η σχέση (13) είναι άξιοσημείωτος, καθότι μάς παρέχει την έκφρασιν της

συναρτήσεως Γ υπό μορφήν ενός άπειρογινόμενου.

Λαμβάνοντας υπό όψιν την σχέση (2), αυτή τελικώς λαμβάνει την μορφήν:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\eta \mu \pi z} \quad (14)$$

Παρατηρούμεν ότι ή συνάρτησις Γ είναι μία μερόμορφος συνάρτησις μέ πόλους τά σημεία $z=0, -1, -2, \dots$ αλλά άνευ ριζών.

Άς επανέλθωμεν εις την άξιοσημείωτον σχέσηιν (12).

Επειδή $\Gamma(1) = \frac{1}{H(1)} = \frac{1}{H(0)} = \frac{1}{G(0)} = \frac{1}{1} = 1$, ευ της σχέσεως (12) λαμβάνομεν διαδοχικώς:

$$\Gamma(2)=1, \Gamma(3)=1 \cdot 2, \Gamma(4)=1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ καί γενικώς } \Gamma(\eta) = (\eta-1)!$$

Όθεν:

$$\Gamma(\eta) = (\eta-1)! \quad (15)$$

Εάν εις την σχέσηιν (14) θέσωμεν $z = \frac{1}{2}$, εύρίσκομεν:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (16)$$

Άπολούδως λαμβάνοντες την παράγωγον της συναρτήσεως $\log \Gamma(z)$, όπου ή $\Gamma(z)$ δίδεται υπό του τύπου (13), εύρίσκομεν:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{1}{(z+\eta)^2} \quad (17)$$

Τύπος του Gauss: Αναχωρούντες ευ του τύπου (13) καί λαμβάνοντες υπό όψιν καί τον τύπον (8) έχομεν:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} e^z \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\eta} - \log \eta\right) \cdot z \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\eta}\right) \cdot e^{-\frac{z}{\eta}} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} e^{-z \log \eta} \cdot z \cdot \prod_{\eta=1}^{\eta} \left(1 + \frac{z}{\eta}\right) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{z \cdot \left(1 + \frac{z}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{z}{\eta}\right)}{\eta^z} \end{aligned}$$

Τελικώς έχομεν τον τύπον:

$$\Gamma(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta! \eta^z}{z \cdot (z+1) \cdot \dots \cdot (z+\eta)} \quad (18)$$

Υποθέτοντες ότι, $z \neq 0, -1, -2, \dots$

Ο τύπος (18) καλεΐται τύπος του Gauss.

Είναι εύκολον νά υπολογίσωμεν τό όλουθροατιμών υπόλοιπων της $\Gamma(z)$ εις

έναν πόλον αὐτῆς. Οὕτω, ἔαν m παριστᾷ ἓνα μὴ ἀρνητικὸν ἀνέραιον, τότε θάσει τοῦ τύπου (12') ἔχομεν:

$$(z+m) \cdot \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m+1)}{z \cdot (z+1) \cdots (z+m-1)}$$

ὑποθέτοντες ὅτι $z \rightarrow -m$ ἔχομεν:

$$(z+m) \Gamma(z) \rightarrow \frac{\Gamma(1)}{(-m) \cdot (-m+1) \cdots (-1)} = \frac{(-1)^m}{m!}$$

Αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ἐπίσης ἀληθὲς καὶ διὰ $m=0$. Οὕτω:

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=-m} \Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!}} \quad (19), m=0, 1, 2, \dots$$

Χαρακτηρισμός τῆς συναρτήσεως Γ .

Ἐάν ἐφαρμόσωμεν διαδοχικῶς τὴν σχέσιν (12), λαμβάνομεν:

$$\Gamma(z+n) = z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1) \cdot \Gamma(z)$$

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $\Gamma(n) = (n-1)!$ θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\Gamma(z+n)}{n! \cdot \Gamma(n)} = \frac{z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1) \cdot \Gamma(z)}{n! \cdot (n-1)!} = \frac{z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1)}{n^{z-1} \cdot n!} \cdot \Gamma(z).$$

ὑποθέτομεν ὅτι $n \uparrow \infty$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (18) τοῦ Gauss εὐρίσομεν τελικῶς:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n! \cdot \Gamma(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1)}{n^{z-1} \cdot n!} \cdot \Gamma(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z \cdot (z+1) \cdots (z+n-1)(z+n)}{n^{z-1} \cdot n!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z+n} \cdot \Gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \cdot 1 \cdot \Gamma(z) = 1 \end{aligned}$$

Οὕτω:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n! \cdot \Gamma(n)} = 1} \quad (20)$$

Ἦδη θὰ ἀποδείξωμεν τὸ κατωθί:

Θεώρημα IX-7-1. Ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία συνάρτησις $F(z)$, ἥ ὁποία ἱκανοποιεῖ τὰς ἐξισώσεις:

$$F(1) = 1 \quad (i)$$

$$F(z+1) = z \cdot F(z) \quad (ii)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(z+n)}{n! \cdot F(n)} = 1 \quad (iii)$$

ἀρνεῖ τὸ z νὰ εἶναι διάφορον ἀπὸ $z=0, -1, -2, \dots$

Απόδειξις: Εάν η $F(z)$ είναι μία λύσις τῆς ἐισώσεως (ii), τότε δά ἔχωμεν:

$$F(z+n) = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1) \cdot F(z)$$

· καὶ $F(n) = (n-1) !$

Οὕτω, βάσει τῆς σχέσεως (iii), δά ἔχωμεν:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(z+n)}{n! \cdot n^{z-1}} = F(z) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n-1)}{n! \cdot n^{z-1}} = \frac{F(z)}{\Gamma(z)}$$

Ὁθεν: $F(z) = \Gamma(z)$

§ 8. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ Γ ΥΠΟ ΜΟΡΦΗΝ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Θεωροῦμεν τὸ γενικευμένον ὀλοκληρώμα A^∞ εἰδους .

$$\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \quad (1), \quad t: \text{πραγματικός ἀριθμός.}$$

Περί αὐτοῦ τοῦ ὀλοκληρώματος ἡσχολήθημεν εἰς τὸν A^∞ τόμον κεφ.λ. XV, § 6 σελ. 545, εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ z ἦτο πραγματικός ἀριθμός.

Ἡδὴ δ' ἀποδείξαμεν ὅτι: Εάν τὸ z εἶναι μιγαδικός ἀριθμός με $\operatorname{Re} z > 0$ τὸ ἄνωτέρω ὀλοκληρώμα ὑπάρχει καὶ εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις.

Πράγματι, τὸ ἄνωτέρω ὀλοκληρώμα γράφεται

$$\int_0^1 e^{-t} \cdot t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \quad (2)$$

καὶ δ' ἀποδείξαμεν ὅτι, τὰ ἄνωτέρω ὀλοκληρώματα ὑπάρχουν.

ὑποθέτομεν ὅτι τὸ $z = x + iy$ γινεῖται εἰς ἓνα τυχόν καὶ φραγμένον μιαι-
στόν σύνολον. Τότε ὑπάρχει μία σταθερά M τοιαύτη, ὥστε $\operatorname{Re} z \geq M$, ὅταν τὸ z
γινεῖται εἰς τὸ ἄνωτέρω σύνολον καὶ οὕτω ἔχομεν:

$$|t^{z-1}| = t^{x-1} \cdot |t^{iy}| = t^{x-1} = t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq t^{M-1}. \quad (2), \quad \text{ὅταν } t \geq 1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: $e^{-\frac{1}{2}t} \cdot t^{M-1} \rightarrow 0$ τοῦ $t \rightarrow \infty$ καὶ ὥς ἐν τούτῳ ὑπάρχει στα-
θερά B (ἐξαρτωμένη ἐν τοῦ M) τοιαύτη, ὥστε $e^{-\frac{1}{2}t} \cdot t^{M-1} \leq B$ ἢ $t^{M-1} \leq B \cdot e^{\frac{1}{2}t}$ (3),
ὅταν $t \geq 1$.

Ὁθεν, λόγῳ τῶν (2) καὶ (3), δά ἔχωμεν:

$$|e^{-t} \cdot t^{z-1}| \leq e^{-t} \cdot t^{M-1} \leq e^{-t} \cdot B \cdot e^{\frac{1}{2}t} \leq B \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \quad (4)$$

και ούτω λόγω της (4) το δεύτερον ολοκλήρωμα του άθροισματος (2) συγχλίνει απολύτως και όμαλώς επί του ηλαιοτου και φραγμένου συνόλου.

Διά δέ το πρώτον ολοκλήρωμα του άθροισματος (2), εάν αντισταστήσωμεν το t υπό του t^{-1} , επιτυγχάνομεν :

$$\int_1^{\infty} e^{-t^{-1}} t^{-z-1} dt \quad (5)$$

Τό ολοκλήρωμα (5) προφανώς δεν συγχλίνει όταν $\operatorname{Re} z \leq 0$. Εάν όμως τό z υινείται εις ένα ηλαιοτόν και φραγμένον σύνολον τό όποϊον υεϊται δεξιά του μιγαδιου άξονος, ή ανισότης $\operatorname{Re} z \geq \xi$, όπου $\xi > 0$, προφανώς ισχύει και ως έυ τούτου δύναμεθα νά έχωμεν :

$$|e^{-t^{-1}} t^{-z-1}| \leq t^{\xi-1}, \text{ όταν } t \geq 1.$$

και ούτω τό πρώτον ολοκλήρωμα συγχλίνει όμαλώς.

Έυαστον των ολοκληρωμάτων (2), συμφώνως πρός τά γνωστά θα παριστά μίαν αναλυτικη συνάρτησιν εις τό χωρίον $\operatorname{Re} z > 0$.

Εάν εις τό ολοκλήρωμα (1) θέσωμεν $z = \eta$, όπου η είναι φυσικός αριθμός, εύρισκομεν δι' ολοκληρώσεως :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\eta-1} dt = (\eta-1)! = \Gamma(\eta).$$

(βλ. Τόμος Α², Κεφ. XV, § 6 ιδιότης XV-6-1 και Πόρισμα XV-6-1).

Ως έυ τούτου είναι φυσικόν νά όρίσωμεν :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re} z > 0 \quad (6)$$

Διά $z = \frac{1}{2}$ λαμβάνομεν :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Θ' αποδείξωμεν λοιπόν τον τύπον (6)

Πρός τούτοις άς θέσωμεν :

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (7)$$

Βάσει του πορίσματος VII-5-1 αρμεί νά αποδείξωμεν ὅτι $F(z) = \Gamma(z)$ εἰς τὴν περίπτωσιν, ὅπου τὸ z εἶναι ἕνας τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς μεταξὺ 0 καὶ 1, καὶ ὅτι ἡ περίπτωσις ὅταν $x \geq 1$ ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην. Ἀρμεί λοιπὸν δι' αὐτὴν τὴν περίπτωσιν νά αποδείξωμεν ὅτι πληροῦνται αἱ τρεῖς συνθήκαι τοῦ θεωρήματος IX-7-1.

Πράγματι,
$$F(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{e^t} = 1$$

Εἶναι δὲ:
$$F(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = x \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} e^{x-1} dt = x \cdot F(x).$$

καὶ οὕτω ἀληθεύει καὶ ἡ δευτέρα συνθήκη τοῦ θεωρήματος.

Ἦδὴ:
$$F(x+\eta) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+\eta-1} dt \quad (8)$$

καὶ ἀντιμαθιστῶντες τὸ t ὑπὸ τοῦ $\eta \cdot t$, ἡ (8) γράφεται:

$$F(x+\eta) = \eta^{x+\eta} \int_0^{\infty} e^{-\eta t} t^{x+\eta-1} dt$$

Ἐντεῦθεν,
$$\frac{F(x+\eta)}{F(\eta) \cdot \eta^x} = \frac{\eta^x}{\Gamma(\eta)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\eta t} t^{x+\eta-1} dt \quad (9)$$

Προειμένον λοιπὸν νά ἀποδειχθῇ ἡ τρίτη συνθήκη τοῦ θεωρήματος IX-7-1, ἀρμεί νά ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (9) τείνει πρὸς τὴν μονάδα τοῦ $\eta \uparrow \infty$. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τούτου ἀκολουθοῦμεν τὴν μέθοδον τοῦ Pringsheim. Πρὸς τούτοις θεωροῦμεν τὰ ὁλοκληρώματα:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\eta-1} dt, \quad \Gamma(\eta+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\eta} dt \quad (10)$$

Ἀντιμαθιστῶντες τὸ t ὑπὸ τοῦ $\eta \cdot t$ εὐρίσκωμεν:

$$\eta^{\eta} \Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta t} t^{\eta-1} dt \quad (11)$$

$$\eta^{\eta} \Gamma(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\eta t} t^{\eta} dt \quad (12)$$

Ήδη όλοκληροϋμεν άμφοτέρα τά μέλη τής ταυτότητας :

$$e^{-nt} \cdot t^{n-1} - e^{-nt} \cdot t^n = \frac{1}{n} \frac{d}{dt} (e^{-nt} \cdot t^n)$$

άπό 0 έως 1 και ούτω έπιτυχάνομεν :

$$\int_0^1 e^{-nt} \cdot t^{n-1} dt - \int_0^1 e^{-nt} \cdot t^n dt = e^{-n} \cdot n^{-1} \quad (13)$$

Έπειδή η (11) γράφεται :

$$\int_0^1 e^{-nt} t^{n-1} dt + \int_1^\infty e^{-nt} t^{n-1} dt = n^{-n} \cdot \Gamma(n) \quad (14)$$

Η (14), λόγω τής (13), γράφεται :

$$\int_1^\infty e^{-nt} t^{n-1} dt + \int_0^1 e^{-nt} \cdot t^n dt = n^{-n} \cdot \Gamma(n) - e^{-n} \cdot n^{-1} \quad (15)$$

Έπειδή η (12) γράφεται :

$$\int_0^1 e^{-nt} \cdot t^n dt + \int_1^\infty e^{-nt} \cdot t^n dt = n^{-n} \cdot \Gamma(n) \quad (16)$$

Η (16), λόγω τής (13), δίδει :

$$\int_0^1 e^{-nt} t^{n-1} dt + \int_1^\infty e^{-nt} \cdot t^n dt = n^{-n} \cdot \Gamma(n) + e^{-n} \cdot n^{-1} \quad (17)$$

Υποθέτομεν ότι $0 < x < 1$, ότε θα είναι :

$$t^n < t^{x+n-1} < t^{n-1}, \text{ όταν } 0 < t < 1$$

$$\text{και } t^{n-1} < t^{x+n-1} < t^n, \text{ όταν } 1 < t.$$

Έάν λοιπόν εις τά όλοκληρώματα (15) και (17) αντιυαταστήσωμεν τό t^{n-1} και t^n αντίστοιχως υπό των t^{x+n-1} και t^{x+n} , έπιτυχάνομεν τās ανισότητας :

$$n^{-n} \cdot \Gamma(n) - e^{-n} \cdot n^{-1} < \int_0^\infty e^{-nt} t^{x+n-1} dt < n^{-n} \cdot \Gamma(n) + e^{-n} \cdot n^{-1} \quad \eta$$

$$1 - \frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!} < \frac{n^n}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^\infty e^{-nt} \cdot t^{x+n-1} dt < 1 + \frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!}$$

Δεδομένου ότι: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!} = 0$, εύρίσκομεν ότι :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-nt} \cdot t^{x+n-1} dt = 1.$$

Ὅθεν, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x+n)}{F(n) \cdot \eta^x} = 1$

Οὕτω ἐδείχθη ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ τρίτη συνθήκη τοῦ θεωρήματος IX-7-1 καὶ κατὰ συνέπειαν ἔχομεν $F(x) = \Gamma(x)$.

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις

1. Νά ἀποδείξοῦν αἱ κατωθὶ ταυτότητες:

i) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\sinh n\pi} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1)}{4z^2 - (2n-1)^2}$ ii) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(2n-1)^2 - 4z^2} = 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{(2n-1)^2 - 4z^2}$

iii) $\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$ iv) $\frac{1}{\sinh \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z}{z^2 + n^2}$

2. Δείξτε ὅτι ἐντὸς τοῦ μοναδιαίου κύβου ἰσχύει:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$$

καὶ ἐπὶ πλέον τὸ ἀνωτέρω ἀπειρογινόμενον συγχλίνει ἀπολύτως.

3. Νά εὑρεθοῦν τὰ πεδία συγχλίσεως τῶν κατωθὶ ἀπειρογινόμενων:

i) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^n}{2^n})$ ii) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^n}{n^2})$ iii) $\prod_{n=1}^{\infty} \sinh \frac{z}{n}$

4. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ ἀπειρογινόμενον:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) \cdot e^{-\frac{z}{n}}$$

συγχλίνει ἀπολύτως καὶ ὁμαλῶς ἐπὶ παντὸς συμπαγοῦς συνόλου.

5. Δείξτε ὅτι τὸ ἀπειρογινόμενον:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} \right] \quad (n^z = e^{z \cdot \log n})$$

συγχλίνει εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ καὶ συγχλίνει ἀπολύτως εἰς καθε ἡμιεπίπεδον $\operatorname{Re} z > 1$.

6. Νά ἀποδείξοῦν αἱ κατωθὶ ταυτότητες:

i) $\sinh \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{2z}{2n+1} \right)^2 \right]$ ii) $\sinh z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{z^2}{n^2 z^2} \right]$ iii) $\cosh \pi z = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{4z^2}{(2n+1)^2} \right]$

iv) $e^{nz} - 1 = \pi z \cdot e^{\frac{\eta z}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^2}{4n^2})$ v) $\cosh z - \sinh z = z^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z^4}{4n^4 n^2})$

7. Δείξτε ότι:

$$\eta \mu \pi(z+a) = e^{\pi i \operatorname{sgn} a} \cdot \prod_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n+a}\right) \cdot e^{-\frac{z}{n+a}},$$

όπου a δεν είναι αμέραιος.

8. Δείξτε ότι:

$$(2n)! = 2^{2n} n! \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) / \sqrt{\pi}$$

9. Δείξτε διά x πραγματιών ότι:

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \cdot \sinh \pi x}$$

10. Εάν $\psi(z)$ παριστᾷ τὴν παράγωγον τοῦ $\log \Gamma(z)$, δείξτε ότι:

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cdot \operatorname{sgn} z.$$

11. Δείξτε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z \cdot \Gamma(n)} = 1$$

Υπόδ: Χρησιμοποιήσατε τὸν τύπον (18) τοῦ Gauss καθὼς καὶ τὸν τύπον (12').

12. Δείξτε ότι:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z). \quad (\text{τύπος τοῦ Legendre}).$$

Ἀπόδ: Εἶναι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \\ &= 4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n+1)^2} \right] = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+m)^2} = 2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) \end{aligned}$$

Δι' ὁλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = e^{az+\theta} \cdot \Gamma(2z). \quad (1)$$

ὅπου αἱ σταθεραί a καὶ θ προσδιορίζονται:

θέτοντες εἰς τὴν (1) $z=1$, $z=\frac{1}{2}$ καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ εὐρίσκομεν μετὰ τούτους ὑπολογισμούς τελειῶς $a = -2 \log 2$ καὶ $\theta = \frac{1}{2} \log \pi + \log 2$.

13. Θέτουμε:

$$\Gamma(z, n) = \frac{n! \cdot n^z}{z \cdot (z+1) \cdot (z+2) \dots (z+n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Δείξτε ότι:

$$\Gamma(z, n) = \frac{n^z \cdot \Gamma(n+1) \cdot \Gamma(z)}{\Gamma(n+z+1)}$$

έν συνεχεία δείξτε ότι: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(n+z)} = 1$.

14. Δείξτε ότι:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 2^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

15. Δείξτε τον τύπον του Gauss:

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{z}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right)$$

16. Διά $\operatorname{Re}\{m\} > 0, \operatorname{Re}\{n\} > 0$ ορίσμεν την συνάρτησιν:

$$B(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

Αυτολούθως δείξτε ότι:

$$i) B(m, n) = B(n, m) \quad ii) B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Απόδειξις (ii)

$$\text{Ὡς γνωστὸν εἶναι } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad \forall z \in \mathbb{M} \text{ μὲ } \operatorname{Re} z > 0$$

Θέτω $t = \tau^2$ ὥστε: $\Gamma(z) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} \tau^{2z-1} d\tau$ (i) ὥστε διὰ $m \in \mathbb{M}$ μὲ $\operatorname{Re}\{m\} > 0$ καὶ $n \in \mathbb{M}$ μὲ $\operatorname{Re}\{n\} > 0$ δά εἶναι:

$$\Gamma(m) \Gamma(n) = 4 \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2m-1} du \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-v^2} v^{2n-1} dv \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2m-1} v^{2n-1} du dv$$

Θέτουμε $u = \rho \sin \theta, v = \rho \cos \theta$ λαμβάνομεν:

$$\Gamma(m) \Gamma(n) = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho^{2(m+n)-1} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\rho d\theta = \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(m+n)-1} d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \right) =$$

$$= \Gamma(m+n) 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \quad (2) \text{ (λόγω τῆς (i)).} \text{ Θέτουμε δὲ } \sin^2 \theta = t \text{ ἔχω:}$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt = B(m, n) \quad (3)$$

“Οθεν $\Gamma(m) \Gamma(n) = \Gamma(m+n) B(m,n)$, ΞΕ ἢς ἡ ἀποδεικνύεται.

17. Ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z} \cdot e^{-z} \{1 + O(1/z)\}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος μαθεύεται *ἀσυμπτωτικὸς τύπος τοῦ Stirling* διὰ τὴν συνάρτησιν Γ . Ἐὰν $z = n$ ἔχωμεν: $\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta/12n}$, ὅπου $0 < \theta < 1$. Εἰδιωκῶς διὰ ἀρυσύντως μεγάλο n ἔχομεν: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$.

Ἐφαρμογή 2^α (συνέχεια τῆς σελ. 174). Τῆς συνάρτησεως $f(z) = e^{1/z}/(1-z)$ νὰ εὐρεθοῦν τὰ ολοκληρωτικὰ ὑπόλοιπα εἰς τὰ ἀνώμαλα σημεία τῆς.

Λύση: Τὰ ἀνώμαλα σημεία αὐτῆς τῆς συνάρτησεως εἶναι τὰ $z=1$ καὶ $z=0$.

Τὸ $z=1$ εἶναι ἕνας ἀπλὸς πόλος καὶ ἔχομεν: $\text{Res } f(z) = \frac{e^{1/z}}{-1} \Big|_{z=1} = -e$.

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ $\text{Res } f(z)$ ἀναπτύσσουμε κατὰ Laurent τὴν $f(z)$ περὶς τοῦ $z=0$ καὶ ἔχομεν:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνωτέρων σειρῶν λαμβάνομεν:

$$\frac{e^{1/z}}{1-z} = \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \cdot \frac{1}{z} + C_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots$$

+ τὸ κανονικὸ μέρος.

Παρατηροῦμεν ὅτι $C_{-k} \neq 0$, $k=2, 3, \dots$. Επειδὴ τὸ πρωτεύον μέρος τῆς κατὰ Laurent ἀναπτύξεως τῆς συνάρτησεως περιέχει ἕνα ἄπειρον ἀριθμὸ ὀντων με ἀρνητικὰς δυνάμεις τοῦ z , τὸ σημεῖο $z=0$ εἶναι ἕνα οὐσιώδες ἀνώμαλο σημεῖο τῆς συνάρτησεως. Τὸ ολοκληρωτικὸ ὑπόλοιπον εἰς αὐτὸ τὸ οὐσιώδες ἀνώμαλο σημεῖο εἶναι κατὰ τὰ γνωστὰ.

$$\text{Res } f(z) = C_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1.$$

$z=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΥΤΗΣ

§1. ΣΥΜΜΟΡΦΟΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ

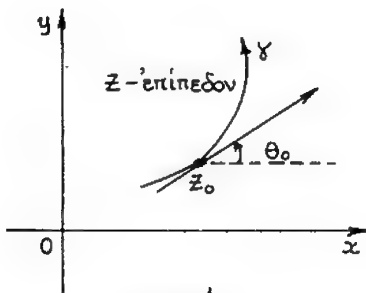
Ἐστω $w=f(z)$ μία συνάρτησις, ἡ ὁποία θεωρεῖται ἀναλυτικὴ εἰς ὑάδε σημεῖον z ἑνός πεδίου G . Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ λεία καμπύλη γ μέ ἐξίσωσιν: $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $a \leq t \leq b$, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου z_0 τοῦ G καὶ ὅτι $f'(z) \neq 0$, διὰ ὑάδε $z \in G$. Ἡ $w=f(z)$ ἀπεικονίζει τὴν γ εἰς μίαν καμπύλην, ἔστω Γ , τοῦ w -ἐπιπέδου καὶ ἡ ὁποία δὲ ἔχη ὡς ἐξίσωσιν τὴν $w=f(z(t))$, $a \leq t \leq b$.

Ὡς γνωστὸν δὲ ἔχωμεν:

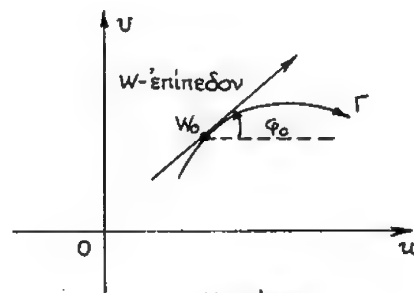
$$w'(t) = f'_z(z) \cdot z'(t) \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ καμπύλη γ εἶναι λεία, δὲ εἶναι $x'(t)+y'(t) \neq 0$ διὰ $a \leq t \leq b$, εἶναι δὲ καὶ $f'_z(z) \neq 0$ κατὰ συνέπειαν, λόγῳ τῆς (1), δὲ εἶναι $w'(t) \neq 0$. Ἐν τῆς (1) λοιπὸν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν:

$$\arg w'(t) = \arg f'_z[z(t)] + \arg z'(t) \quad (2)$$



Σχ. 1α



Σχ. 1β

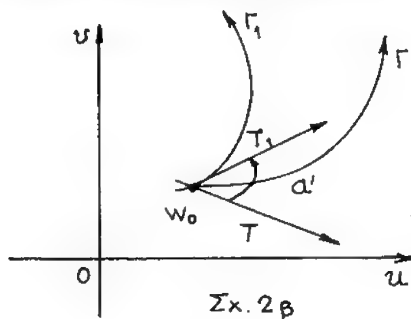
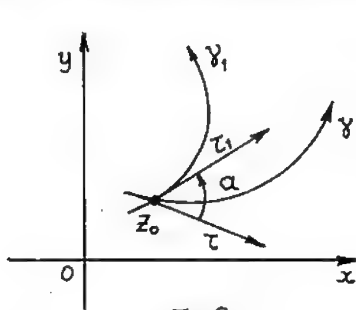
Ἐστω θ_0 ἡ γωνία κλίσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς γ εἰς τὸ σημεῖον $z_0=z(t_0)$, $a < t_0 < b$, εἶναι δὲ αὕτη μία τιμὴ τοῦ $\arg z'(t_0)$. Ἐάν ψ_0 εἶναι μία τιμὴ τοῦ $\arg f'_z(z_0)$, τότε, συμφώνως πρὸς τὴν (2), δὲ ἔχωμεν:

$$\varphi_0 = \psi_0 + \theta_0 \quad (3)$$

Ἡ (3) δίδει τὴν τιμὴν τοῦ $\arg w'(t_0)$ καὶ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τῆς διεύθυνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς Γ εἰς τὸ σημεῖον $w_0=f(z_0)$. Ὅθεν, ὅταν ἡ

συνάρτησις f είναι αναλυτική εἰς τὸ z_0 μὲ $f'(z_0) \neq 0$, μία προσανατολισμένη ἐφαπτομένη μιᾶς θείας καμπύλης γ εἰς τὸ z_0 περιστρέφεται κατὰ τὴν γωνίαν $\psi_0 = \arg f'(z_0)$ ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = f(z)$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἔχομεν ἐπὶ τοῦ πεδίου G τὴν συνάρτησιν $w = f(z)$, ὡς ἀνωτέρω ὠρίσθη, καὶ ἔστωσαν γ καὶ γ_1 δύο θείαι καμπύλαι υεῖ-μεναι ἐντὸς τοῦ G καὶ διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου z_0 (βλ. Σχ. 2α).



Ἐστωσαν τ καὶ τ_1 αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων τούτων εἰς τὸ z_0 καὶ α ἡ γωνία τῶν καμπύλων ἢ ὀριζομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῶν τ καὶ τ_1 εἰς τὸ z_0 καὶ ἡ ὁποία μετρεῖται ἀπὸ τὴν τ πρὸς τὴν τ_1 .

Θὰ εἶναι δὲ $\alpha = \theta_1 - \theta$, ὅπου θ_1, θ αἱ γωνίαι κλίσεως τῶν τ_1, τ μετὰ τοῦ ox . Ἐστωσαν δὲ Γ καὶ Γ_1 αἱ εἰσόνες τῶν γ καὶ γ_1 ὑπὸ τῆς $w = f(z)$ (βλ. Σχ. 2β).

Ἐστωσαν δὲ T καὶ T_1 αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν Γ καὶ Γ_1 εἰς τὸ σημεῖον $w_0 = f(z_0)$. Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω, ἡ γωνία τῶν T καὶ T_1 μετρούμενη ὑπὸ τὴν T πρὸς τὴν T_1 θὰ εἶναι: $\alpha' = \varphi_1 - \varphi$, ὅπου φ_1, φ αἱ γωνίαι κλίσεως τῶν T_1, T μετὰ τοῦ ἄξονος ou . Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (3) θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha' = \varphi_1 - \varphi = \{ \arg f'(z_0) + \theta_1 \} - \{ \arg f'(z_0) + \theta \} = \theta_1 - \theta = \alpha.$$

Ὁρισμός X-1-1. Μία ἀπειριόνησις ἡ ὁποία διατηρεῖ τὰ μέτρα καὶ τὴν φοράν τῶν γωνιῶν μεταξὺ δύο θείων καμπύλων διερχομένων δι' ἑνὸς καθαρισμένου σημείου, καλεῖται σύμμορφος ἀπειριόνησις εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται τὸ αὐόλουθον:

Θεώρημα X-1-1. Ἐάν διὰ καθε σημείου z τοῦ πεδίου G ἡ συνάρτησις f

Είναι αναλυτική και $f'(z) \neq 0$, (δηλ. η $f(z)$ είναι αναλυτική και άπλη), ή άπειρόνις $w=f(z)$ είναι σύμμορφος.

Εάν κατά την άπειρόνις $w=f(z)$ διατηρούνται άπλως τα μέτρα των γωνιών των αμψύλων όχι όμως αναχαστινως και αί «φοραί» των γωνιών, τότε αυτή δά καλεϊται ισογώνιος άπειρόνις.

Ευ του άνωτέρω θεωρήματος προκύπτει τώρα ότι:

Πόρισμα X-1-1. Εάν αί εϊμόνες δύο αμψύλων υπό μις συμμόρφου άπειούσεως είναι όρθογώνιοι, τότε αί αμψύλαι αύται είναι όρθογώνιοι.

• Εάν η άπειρόνις $w=f(z)$ είναι σύμμορφος εις τό σημείον z_0 , τότε αυτή δά έχει μίαν αντίστροφον εις μίαν περιοχήν του σημείου $w_0=f(z_0)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άνοιτά όρθογώνια G και D με κέντρον τά z_0 και w_0 αντιστοιχως, τοιαύτα, ώστε εις κάθε σημείον w του D υπάρχει ένα, και μόνον ένα, σημείον z του G με την ιδιότητα: $w=f(z)$. Η αντίστροφος εϊμόνα παρίσταται διά του $z=g(w)$, είναι αναλυτική εις τό w_0 και έχει παράγωγον διδομένην υπό του τύπου: $g'(w_0)=\frac{1}{f'(z_0)}$.

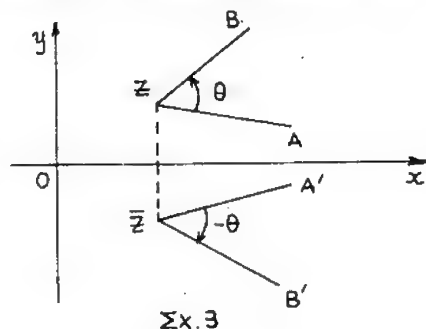
Παράδειγμα 1^{ον}. Η άπειρόνις $w=z^2$ είναι σύμμορφος διά κάθε $z \neq 0$, επειδή η παράγωγος $w'=2z$ δεν μηδενίζεται διά κάθε $z \neq 0$. Αυτή δεν είναι σύμμορφος διά $z=0$. Πράγματι, επειδή

$$\arg w = \arg z^2 = 2 \arg z,$$

η άπειρόνις λοιπόν διπλασιάζει κάθε γωνίαν, της όποιας αί πλευραί διέρχονται διά της άρχης.

2^{ον}. Η άπειρόνις $w=\bar{z}$ προφανως δεν είναι σύμμορφος, διότι διά κάθε $z \in \mathbb{C}$ δεν υπάρχει η παράγωγος αυτής. Η άπειρόνις αυτή διατηρεί τά μέτρα των γωνιών, ουχι όμως και την φοράν αυτών, ως φαίνεται ευ του Σχ. 3.

3^{ον}. Ένα λίαν αξιόλογον παράδειγμα συμμόρφου άπειούσεως είναι ο γραμμικός υλισματινός μετασχηματισμός



Σχ. 3

ήτοι : $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ με $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Πράγματι είναι
 $S'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ διά κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

§ 2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

"Εστω $w = f(z)$ μία σύμμορφος απεικόνισης απεικονίζουσα τό πεδίο G εις τό πεδίο G^* . Τότε τό πεδίο G^* καλεῖται σύμμορφος εἰκόνα τοῦ πεδίου G ἢ ὅτι τό G απεικονίζεται συμμόρφως ὑπό τῆς $w = f(z)$ εις τό G^* .

Πρότασις X-2-1. Ἐάν τό πεδίο G^* εἶναι μία σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G , τότε τό G εἶναι σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G^* . Ἐπί πλέον ἔαν G^* εἶναι μία σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G καί G^{**} εἶναι μία σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G^* , τότε τό G^{**} εἶναι σύμμορφος εἰκόνα τοῦ G .

Ἀπόδειξις: Ἐστω $w = f(z)$ μία σύμμορφος απεικόνισης τοῦ G ἐντός τοῦ G^* μέ ἀντίστροφον τῆς $z = \varphi(w)$ καί ἔστω $\eta = g(w)$ μία σύμμορφος απεικόνισης τοῦ G^* ἐντός τοῦ G^{**} . Ἡ $z = \varphi(w)$ θά εἶναι καί αὐτή, προφανῶς, μία σύμμορφος απεικόνισης τοῦ G^* ἐντός τοῦ G . Τέλος ἡ $\eta = g(f(z))$ θά εἶναι σύμμορφος απεικόνισης τοῦ G ἐντός τοῦ G^{**} , ὡς σύνθεσις συμμόρφων απεικονίσεων.

• Ἐστω G εἶναι ἕνας δίσκος ἢ ἕνα ἡμιεπίπεδον καί z_0 ἕνα σημεῖον τοῦ G . Ὡς γνωστόν, συμφώνως πρὸς τὰ παραδείγματα πού ἐξετάσαμεν εἰς τό Κεφάλαιον V, § 4, βλ. σχετιυή ἐφαρμογή, δυνάμεθα νά απεικονίσωμεν τό ἐν λόγω χωρίον συμμόρφως δι' ἑνός γραμμικοῦ υἱασματικοῦ μετασχηματισμοῦ $w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ εἰς τόν μοναδιαῖον κύκλον $|w| < 1$, ὁ ὁποῖος νά πληροῖ τὰς συνθήκας $S(z_0) = 0$, $S'(z_0) \neq 0$.

Τό ἀνωτέρω δυνάμεθα νά τό γενικεύσωμεν διά τοῦ κατωτέρω θεμελιώδους θεωρήματος, τό ὁποῖον δέν ἀποδεικνύομεν.

Θεώρημα X-2-1. (Riemann) Ἐστω G ἕνα ἀπλό καί συνευτιυόν πεδίο εἰς τό ἐπευτεταμένον μιχαδιυόν ἐπίπεδον, τοῦ ὁποῖου τό σύνορον περιέχει περισσότερα ἀπό ἕνα σημεῖα καί ἔστω z_0 εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ G . Τότε ὑπάρχει

μία αναλυτική και άπλη συνάρτησις $w=f(z)$, η οποία άπεινώνει τό G συμμόρφως εντός του δίσκου $|w|<1$ και επί πλέον νά ικανοποιή τας συνθήκας $f(z_0)=0$ και $f'(z_0)>0$.

Παρατήρησις: Η υπόθεσις ότι τό σύνορον του G πρέπει νά περιέχη περισσότερα από ένα σημεία είναι άπαραίτητος. Πράγματι, εάν Π_{z_0} παριστά όλοκληρον τό έπευτεταμένον μιγαδιονόν επίπεδον έξαιρέσει του σημείου z_0 και υποθέσωμεν ότι ή $w=f(z)$ είναι μία σύμμορφος άπεινόνισις του Π_{z_0} εντός του δίσκου $|w|<1$, τότε και ή συνάρτησις $g(z)=f(\frac{1}{z}+z_0)$ είναι μία σύμμορφος άπεινόνισις όλοκληρου του έπευτεταμένου μιγαδιουό επίπεδου Π_∞ εντός του ίδιου δίσκου. Άλλά μία τοιαύτη συνάρτησις δέν δύναται νά ύπάρχη, διότι εάν $|g(z)|<1$ διά τάδε πεπερασμένον z , τότε ή $g(z)$ είναι μία φραγμένη άνεραία συνάρτησις και συμφώνως πρός τό θεώρημα του Λιονβίλλε αυτή θά είναι σταθερά. Όθεν, μία τοιαύτη συνάρτησις δέν δύναται νά είναι σύμμορφος.

Του άνωτέρω θεωρήματος του Riemann δύναμεθα νά έχωμεν τήν κάτωδι γενίευσιν.

Θεώρημα X-2-2. Έστωσαν G και G^* είναι δύο άπλη συνευτιυά χωρία επί του έπευτεταμένου μιγαδιουό επίπεδου έυστον των όποιων έχει ένα σύνορον περιέχον περισσότερα από ένα σημεία. Έστω z_0 είναι ένα σημείον του G και w_0 ένα σημείον του G^* . Τότε ύπάρχει μία αναλυτική και άπλη συνάρτησις $w=f(z)$, η οποία άπεινώνει συμμόρφως τό G εις τό G^* και επί πλέον ικανοποιεί τας συνθήκας:

$$f(z_0)=w_0, \quad f'(z_0)>0.$$

Άπόδειξις: Έστω K ό δίσκος $|y|<1$ και έστω $y=g(z)$ μία σύμμορφος άπεινόνισις του G εντός του K τοιαύτη, ώστε $g(z_0)=0$, $g'(z_0)>0$. Προφανώς ή άπεινόνισις αυτή έχει μίαν αντίστροφον, έστω τήν $z=q(y)$.

Έστω $\eta=h(w)$ είναι ή σύμμορφος άπεινόνισις του G^* εντός του K τοιαύτη, ώστε:

$$h(w_0)=0, \quad h'(w_0)>0$$

1) Η συνθήκη $f'(z_0)>0$ ισοδυναμεί με τό νά γράψωμεν $\arg f'(z_0)>0$.

Ἐστω δὲ $W = \psi(\zeta)$ ἡ ἀντίστροφος τῆς $\zeta = h(W)$ τότε θά ἔχωμεν προφανῶς :

$$\psi(0) = W_0 \text{ καὶ } \psi'(0) = \frac{1}{h'(W_0)} > 0.$$

Ἡ ἀπειριόνοις $W = \psi(\zeta) = \psi(q(z)) \equiv f(z)$, εἶναι μία σύμμορφος ἀπειριόνοις τοῦ G ἐντὸς τοῦ G^* τοιαύτη, ὥστε :

$$f(z_0) = \psi(q(z_0)) = \psi(0) = W_0$$

$$\text{καὶ } f'(z_0) = \psi'(q(z_0)) \cdot q'(z_0) = \psi'(0) \cdot q'(z_0) = \frac{q'(z_0)}{h'(W_0)} > 0.$$

§ 3. ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΜΜΟΡΦΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

Ι. Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν :

$$W = f(z) = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \cosh x \cosh y + i \sinh x \sinh y \quad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $f'(z) = 0$, ὅταν $z = \eta \pi i$, ὅπου $\eta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ἡ ἀνωτέρω ἀπειριόνοις εἶναι σύμμορφος μόνον εἰς τὰ πεδία ποῦ δὲν περιέχουν τὰ ἀνωτέρω σημεῖα. Αὕτη εἶναι περιοδική ὡς πρὸς y μὲ περίοδον 2π · ἐπὶ πλείονδὲ ἔχομεν $\cosh(-z) = \cosh z$. Ὅθεν, ἡ ἀνωτέρω ἀπειριόνοις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος ἐπὶ ἐκάστου πεδίου, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει δύο σημεῖα z_1, z_2 τοιαῦτα, ὥστε $z_1 - z_2 = 2\eta \pi i$ μὲ $\eta = 0, 1, 2, \dots$

Θεωροῦντες τὸ W -ἐπίπεδον καὶ θέτοντες $W = u + i v$ θά ἔχωμεν, λόγῳ τῶν (1) :

$$\left. \begin{aligned} u &= \cosh x \cosh y \\ v &= \sinh x \sinh y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{u^2}{\cosh^2 x} + \frac{v^2}{\sinh^2 x} = \cosh^2 y + \sinh^2 y = 1 \quad (3)$$

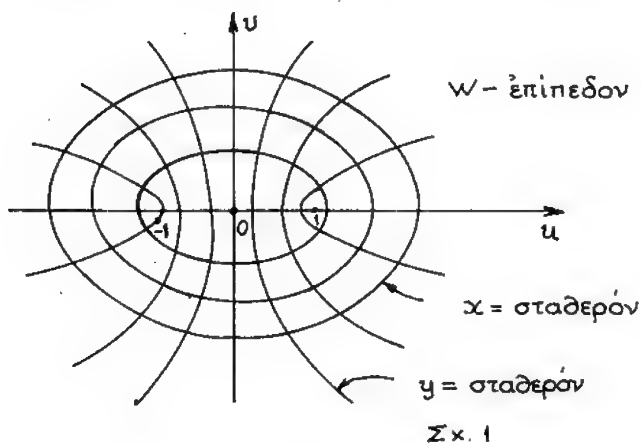
Οὕτω καθε εὐθεία $x = \text{σταθ.}$ μετασχηματίζεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς μίαν ἑλλειψιν μὲ μέγαν ἀξονα τὸν $\cosh x$ κατὰ τὴν u -διεύθυνσιν καὶ μικρὸν ἀξονα τὸν $|\sinh x|$ κατὰ τὴν v -διεύθυνσιν.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{u^2}{\sinh^2 y} - \frac{v^2}{\cosh^2 y} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (4)$$

Οὕτω καθε εὐθεία $y = \text{σταθ.}$ μετασχηματίζεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς μίαν ὑπερβολὴν τέμνουσα τὸν ἀξονα τῶν u εἰς τὰ σημεῖα $\pm \cosh y$ καὶ ἔχουσα ἀσυμπτώτους τὰς $u = \pm (\cosh y) v$.

Αἱ εἰκόνες τῶν εὐθειῶν $x = \text{σταθ.}$ καὶ $y = \text{σταθ.}$ τοῦ z -ἐπιπέδου ὑπὸ τοῦ ἄνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἰς τὸ w -ἐπίπεδον παρέχονται ὑπὸ τοῦ Σχ. 1.



II. θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν:

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

ὅστις μαθηταὶ μετασχηματισμὸς τοῦ Joukowski.

ἔχομεν:

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad (2)$$

ὅθεν,

$$f'(z) \neq 0, \text{ ἔάν } z \neq \pm 1$$

Ὁ ἄνωτέρω λοιπὸν μετασχηματισμὸς εἶναι μία σύμμορφος ἀπειριόνησις τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ἐντὸς τοῦ ἰδίου.

Εἰς τὸ σύστημα πολικῶν συντεταγμένων ἔχομεν:

$$\left. \begin{aligned} z &= r (\cos \theta + i \sin \theta), \quad r > 0 \\ \text{ὅτε} \quad \frac{1}{z} &= \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ἐστω $w = u + iv$ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ou, ov .

Λόγω τῶν (3) θὰ ἔχωμεν:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\ v &= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

i) Ἡ εἰκόνα τοῦ κύκλου $|z| = r$ θὰ εἶναι ἡ ἑλλειψις μετὰ ἡμιάξονας $a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$ καὶ $b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν ἀξόνων ou, ov ἀντιστοίχως.

Διὰ $r = 1$ εἶναι $b = 0$ καὶ ἡ εἰκόνα τοῦ $|z| = 1$ εἶναι τὸ τμήμα $[-1, +1]$ διαγραφόμενον δύο φορές.

Διὰ $\tau \neq 1$ επιτυγχάνομεν τὴν ἔλλειψιν, τῆς ὁποίας αἱ ἐστῖες δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1, \text{ ἥτοι εἶναι τὰ σημεῖα } \pm 1.$$

Διὰ τὰς τιμὰς τ καὶ $\frac{1}{\tau}$ επιτυγχάνομεν τὴν αὐτὴν ἔλλειψιν.

ii) Ἡ εἰκόνα τῆς ἡμιευθείας $\theta = \theta_0$ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς 0 θὰ εἶναι ἡ υαμπύλη μετ' εἰσῶσιν:

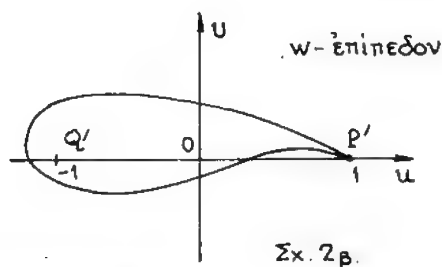
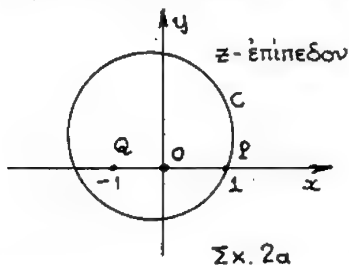
$$\frac{u^2}{\sigma \eta^2 \theta_0} - \frac{v^2}{\eta \mu^2 \theta_0} = 1, \text{ με } u \cdot \sigma \eta \theta_0 > 0 \quad (5)$$

ἥτοι διὰ $\theta_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$ εἶναι ἕνας κλάδος ὑπερβολῆς μετ' ἐστῖαν τὸ $+1$, ἐὰν $\sigma \eta \theta_0 > 0$ καὶ ἐστῖα τὸ -1 , ἐὰν $\sigma \eta \theta_0 < 0$ καὶ ἀσυμπτώτους τὰς ἡμιευθείας $\theta = \pm \theta_0$.

Διὰ $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$ εἶναι ὁ ἄξων ou .

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι $|z| = \tau$ καὶ αἱ ἡμιευθεῖαι $\theta = \theta_0$ τέμνονται ὀρθογωνίως καὶ ἡ ἀπεικόνισις εἶναι σύμμορφος, ἔπεται ὅτι αἱ ἔλλειψεις καὶ αἱ ὑπερβολαὶ ἐστῶν $+1$ καὶ -1 τέμνονται ὀρθογωνίως.

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός ἔχει ἐφαρμογὴν εἰς τὴν Μηχανικὴν τῶν ρευστῶν, διότι ὁρισμένα κύκλοι διερχόμενοι διὰ μιᾶς τῶν ἐστῶν $+1$ ἢ -1 ἔχουν ὡς εἰκόνα υαμπύλην ὁμοιάζουσαν πρὸς τὴν υάτοψιν πτέρυκος ἀεροπλάνου. (βλ. Σχ. 2α καὶ Σχ. 2β).



§ 4. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ SCHWARTZ-CHRISTOFFEL

Διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel θὰ ἐπιτύχωμεν μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x καθὼς καὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου $\eta \mu z > 0$ ἐπὶ ἑνὸς δοθέντος κλειστοῦ πολυγώνου καὶ τοῦ ἐσωτερίου τοῦ τοῦ w -ἐπιπέδου.

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός εὕρισκε ἐφαρμογὰς εἰς προβλήματα τῆς ροῆς τῶν ρευστῶν, ἡλεκτροστατικῶν ἡλεκτρισμοῦ καθὼς καὶ τῆς θεωρίας δυναμικοῦ.

Ι. Άπειρόνισις τοῦ πραγματιοῦ ἄξονος ἐπὶ ἑνὸς πολυγώνου.

Θὰ παραστήσωμεν τὸ μοναδιαῖον ἑφαπτομενιὸν διάνυσμα ἑνὸς λείου προσανατολισμένου τόξου C εἰς τὸ σημεῖον z_0 ὑπὸ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $t(|t|=1)$. Ἐστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς τ ($|\tau|=1$) παριστᾷ τὸ μοναδιαῖον ἑφαπτομενιὸν διάνυσμα τῆς εὐθύνος Γ τῆς C ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=f(z)$ εἰς τὸ ἀντιστοιχικὸν σημεῖον $w_0=f(z_0)$. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ σημεῖον z_0 καὶ ὅτι $f'(z_0) \neq 0$ (δηλ. ἔχομεν σύμμορφον ἁπειρόνισιν). Συμφώνως πρὸς τὴν §1 βλ. τύπον (2) θὰ ἔχωμεν:

$$\arg \tau = \arg t + \arg f'(z_0) \quad (1)$$

Εἰς τὴν εἰδιωτὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ C εἶναι ἓνα τμήμα τοῦ ἄξονος τῶν x μέθετινὴν φοράν πρὸς τὰ δεξιά, τότε $t=1$ καὶ ὡς ἐκ τούτου $\arg t=0$ εἰς τὰδε σημεῖον $z_0=x$ ἐπὶ τῆς C .

Ὅθεν ἡ σχέσις (1) γράφεται δι' αὐτὴν τὴν περίπτωσιν:

$$\arg \tau = \arg f'(x) \quad (2).$$

Ἐὰν ἡ $f'(z)$ ἔχῃ σταθερὸν ὄρισμα κατὰ μήκος αὐτοῦ τοῦ τμήματος, ἔπεται ὅτι τὸ $\arg \tau$ εἶναι σταθερὸν, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ εὐθύν Γ τῆς C εἶναι ἐπίσης ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα.

Ἦδη προτιθέμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓναν μετασχηματισμὸν $w=f(z)$ ὁ ὁποῖος νὰ ἁπειμονίῃ τὸ λόλουληρον τὸν ἄξονα x ἐπὶ ἑνὸς πολυγώνου ἔχοντος n -πλευράς, ὅπου $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ καὶ $z=\infty$ εἶναι τὰ σημεῖα αὐτοῦ τοῦ ἄξονος καὶ ὁ ὁποῖος (μετασχηματισμὸς) νὰ ἁπειμονίῃ τὰ ἀνωτέρω σημεῖα εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου.

Αἱ κορυφαὶ λοιπὸν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι τὰ σημεῖα $w_j=f(x_j)$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) καὶ $w_n=f(\infty)$.

Ἡ συνάρτησις f πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὸ $\arg f'(z)$ νὰ πηδᾷ ἀπὸ μία σταθερὰ τιμὴ εἰς μίαν ἄλλην σταθεράν τιμὴν εἰς τὰ σημεῖα $z=x_j$ καθὼς τὸ z κινεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x .

Ἐὰν ἡ συνάρτησις f εὐλεγεῖν εἰς τρόπον, ὥστε:

$$\frac{df}{dz} = A \cdot (z-x_1)^{-k_1} \cdot (z-x_2)^{-k_2} \dots (z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad (3)$$

ὅπου A εἶναι μιγαδικὴ σταθερά καὶ ἑκαστον τῶν k_j εἶναι πραγματικὴ στα-

θερά, τό ὄρισμα τῆς $f'(z)$ ἀλλάξει κατὰ τόν προαναφερθέντα τρόπον κα-
θώς τό z διαγράφει τόν πραγματινόν ἄξονα.

Διά τό ὄρισμα τῆς συναρτήσεως (3) δυνάμεθα νά γράψωμεν :

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z-x_1) - k_2 \arg(z-x_2) - \dots - k_{n-1} \arg(z-x_{n-1}) \quad (4)$$

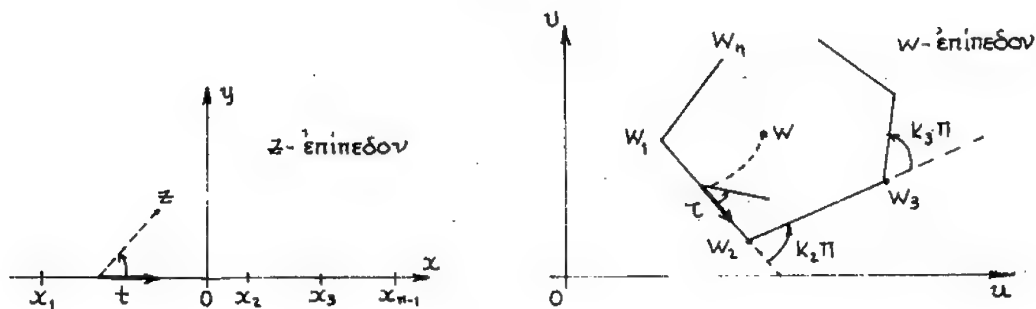
Εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου $z=x$ καί $x < x_1$, ἔχομεν :

$$\arg(z-x_1) = \arg(z-x_2) = \dots = \arg(z-x_{n-1}) = \pi$$

Ἐάν $x_1 < x < x_2$, τότε $\arg(z-x_1) = 0$ καί ἕκαστος τῶν ἄλλων ὅρων ἔχει ὄ-
ρισμα ἴσον πρὸς π .

Συμφώνως πρὸς τήν εἰσαγωγὴν (4) τό $\arg f'(z)$ αὐξάνεται ἀποτόμως ὑπὸ
τῆς γωνίας $k_1\pi$ καθὼς τό z κινεῖται πρὸς τὰ δεξιὰ διὰ μέσου τοῦ σημείου
 $z=x_1$. Ὀμοίως τό $\arg f'(z)$ πηδᾷ εἰς μίαν μεγαλύτεραν τιμὴν διὰ προσθέ-
σεως τῆς γωνίας $k_2\pi$ καθὼς τό z διέρχεται διὰ μέσου τοῦ σημείου $z=x_2$ κ.ο.κ.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὅψιν τήν εἰσαγωγὴν (2), τό μοναδιαῖον διάνυσμα τ παρα-
μένει σταθερόν κατὰ διεύθυνσιν καθὼς τό z κινεῖται ἀπὸ τό σημεῖον x_{j-1}
πρὸς τό σημεῖον x_j · τότε τό $W=f(z)$ κινεῖται κατὰ μίαν σταθεράν διεύθυν-
σιν κατὰ μήκος μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Ἡ διεύθυνσις τῆς τ μεταβάλλε-
ται ἀποτόμως ἀπὸ τῆς γωνίας $k_j\pi$ εἰς τό σημεῖον W_j , τό ὅποῖον εἶναι ἡ εἰ-
κὼν τοῦ x_j ὑπὸ τοῦ $W=f(z)$. (βλ. Σχ.1). Αὐταί αἱ γωνίαι $k_j\pi$ εἶναι αἱ ἔξωτε-
ριαί γωνίαι τοῦ πολυγώνου τοῦ διαγραφομένου ὑπὸ τοῦ σημείου W .



Σχ. 1

. Αἱ ἔξωτερικαί γωνίαι δύνανται νά μεταβάλλωνται μεταξύ τῶν τιμῶν $-\pi$
καί π , αὐτό σημαίνει ὅτι $-1 < k_j < 1$. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώ-
νου δέν διασταυροῦνται μεταξύ των καί ὅτι τοῦτο εἶναι προσανατολισμένο.

Ὡς γνωστόν τό ἄθροισμα τῶν ἑξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς υἱειστοῦ πολυγώνου εἶναι 2π καί ὡς εἰς τοῦτου ἡ ἑξωτερική γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν κορυφὴν W_n , ἡ ὁποία εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ σημείου $z = \infty$ ὑπὸ τῆς ἀπεικονίσεως (3) δύνανται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$K_n \pi = 2\pi - (K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1}) \pi.$$

Οἱ ἀριθμοὶ K_j ὀφείλουν ἀναγκαστικῶς νὰ ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις :

$$K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1} + K_n = 2, \quad -1 < K_j < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Ἄς σημειώσωμεν ὅτι $K_n = 0$, ἐὰν

$$K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1} = 2 \quad (6)$$

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ διεύθυνσις τοῦ z δὲν μεταβάλλεται εἰς τὸ σημείου W_n · ἥτοι τὸ W_n δὲν εἶναι μία κορυφή καὶ τὸ πολύγωνον ἔχει $n-1$ πλευράς (ἀνοιχτόν πολύγωνον).

Οὕτω ἐδείχθη ἡ ὑπαρξίς μιᾶς συναρτήσεως τῆς ὁποίας δίδεται ἡ παράγωγος ὑπὸ τοῦ τύπου (3).

II. Ὁ μετασχηματισμός τῶν Schwartz - Christoffel.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸν τύπον :

$$f'(z) = A (z-x_1)^{-K_1} \cdot (z-x_2)^{-K_2} \dots (z-x_{n-1})^{-K_{n-1}} \cdot (z-x_n)^{-K_n} \quad (1').$$

Ὅπως ἐλέγχθη ἀνωτέρω ἡ συνάρτησις $w = f(z)$ ἀπεικονίζει τὸν ἄξονα x ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου. Ἀναλυτικώτερα, ἡ ἐν λόγῳ συνάρτησις ἀπεικονίζει τὰ σημεία $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x ἐπὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυγώνου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $x_n = \infty$, ὁ τελευταῖος παράγωγος τοῦ ἀνωτέρω γινομένου δύναται νὰ παραλειφθῇ. Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν $A = K/(-x_n)^{-K_n}$, ὅπου K σταθερά, τότε τὸ δεξιὸν μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος γράφεται :

$$K \cdot (z-x_1)^{-K_1} \cdot (z-x_2)^{-K_2} \dots (z-x_{n-1})^{-K_{n-1}} \cdot \left(\frac{x_n - z}{x_n} \right)^{-K_n},$$

ὅπου $K_1 + K_2 + \dots + K_{n-1} + K_n = 2$ καὶ $-1 < K_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Καθὼς τὸ $x_n \rightarrow \infty$ ὁ τελευταῖος παράγωγος τείνει πρὸς τὸ 1. Αὐτὸ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ νὰ παραλείψωμεν τὸν παράγοντα τοῦτον.

Οὕτω λοιπόν όταν τὰ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} εἶναι πεπερασμένα καὶ $x_n = \infty$, ἡ $f'(z)$ θὰ θεωρεῖται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f'(z) = A (z-x_1)^{-k_1} \cdot (z-x_2)^{-k_2} \dots (z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \quad (1)$$

Ἐς θεωρήσωμεν τὸν παράγοντα $(z-x_j)^{-k_j}$ ὁ ὁποῖος παριστᾷ υἱάδον δυναμοσυναρτήσεως καὶ ὁ ὁποῖος ἀπουσιάζει κατὰ τὸν ἀξονα τῶν x . Ἀναλυτικώτερα γράφομεν :

$$(z-x_j)^{-k_j} = |z-x_j|^{-k_j} e^{-ik_j \theta_j} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}\right) \quad (2)$$

ὅπου $\theta_j = \arg(z-x_j)$ καὶ $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Οὕτω ἡ συνάρτησις $f'(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ παντοῦ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\Im m z \geq 0$ ἐντός εἰς τὰ $n-1$ υἱαδιὰ σημεῖα x_j .

Ἐὰν z_0 εἶναι ἓνα σημεῖον εἰς τὸ χωρίον, ὅπου ἡ $f(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ παριστῶντες δὲ τοῦτο διὰ G , τότε ἡ συνάρτησις :

$$W = F(z) = A \cdot \int_{z_0}^z \frac{dt}{(t-x_1)^{k_1} (t-x_2)^{k_2} \dots (t-x_{n-1})^{k_{n-1}}} \quad (3)$$

εἶναι μία μονότιμος καὶ ἀναλυτικὴ ἐντός τοῦ αὐτοῦ χωρίου, ὅπου ὁ δρόμος τῆς ὁλοκληρώσεως ἀπὸ τὸ z_0 εἰς τὸ z εἶναι καθεὶς γραμμὴ υἱεμένη ἐντός τοῦ χωρίου G . Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν : $F'(z) = f'(z)$.

ἵνα ὀρίσωμεν τὴν συνάρτησιν $F(z)$ εἰς τὸ σημεῖον $z=x$, εἰς τρόπον, ὥστε αὕτη νὰ εἶναι συνεχής, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ $(z-x_1)^{-k_1}$ εἶναι ὁ μόνος παράγων τῆς ευφράσεως (1), ὅπου ἀπειρίζεται διὰ $z=x_1$. Οὕτω, ἐὰν $\phi(z)$ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῶν ὑπολοίπων παραγόντων τῆς ευφράσεως (1), ἡ $\phi(z)$ εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὸ σημεῖον $z=x_1$ καὶ ὥς ἐν τούτῳ δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ ἐντός ἑνὸς ἀνοικτοῦ δίσκου $|z-x_1| < r$, εἰς σειράν Ταυλοῦ περὶ τὸ x_1 , ἥτοι :

$$f'(z) = (z-x_1)^{-k_1} \cdot \phi(z) = (z-x_1)^{-k_1} \left[\phi(x_1) + \phi'(x_1) \cdot (z-x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!} (z-x_1)^2 + \dots \right]$$

$$\text{ἢ} \quad f'(z) = \phi(x_1) \cdot (z-x_1)^{-k_1} + (z-x_1)^{1-k_1} \cdot \psi(z) \quad (4)$$

ὅπου ψ εἶναι ἀναλυτικὴ καὶ κατὰ συνέπειαν συνεχής παντοῦ εἰς ὁλοκληρὸν τὸν ἀνοικτὸν δίσκον.

Ἐπειδὴ $1-k_1 > 0$, ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἐξισώσεως (4) παριστᾷ μίαν συνεχὴ συνάρτησιν τοῦ z παντοῦ εἰς τὸ τμήμα τοῦ δίσκου,

όπου $\eta m z \geq 0$ (ήμιδίσκος), εάν αποδώσωμεν εἰς τὸν ὅρου τοῦτον τὴν τιμὴν μηδέν εἰς τὸ σημεῖον $z = x_1$.

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{z_1}^z (t-x_1)^{1-k_1} \psi(t) \cdot dt$$

τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς (4) κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης ἀπὸ τοῦ z_1 ὡς τὸ z , ὅπου τὸ z_1 καὶ ἡ καμπύλη καίεται εἰς τὸν ἀνωτέρω ὀρισθέντα ἡμιδίσκον εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις τοῦ z εἰς τὸ σημεῖον $z = x_1$. Αὐολογῶν τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{z_1}^z (t-x_1)^{-k_1} \cdot dt = \frac{1}{1-k_1} \cdot [(z-x_1)^{1-k_1} - (z_1-x_1)^{1-k_1}]$$

κατὰ μῆκος τοῦ ἰδίου τμήματος παριστᾷ ἐπίσης μίαν συνεχῆ συνάρτησιν τοῦ z εἰς τὸ x_1 , εάν ὀρίσωμεν ὡς τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος διὰ $t = x_1$ ὡς τὸ ὅριον τοῦ δεξιῦ μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος καθὼς τὸ z τείνει πρὸς τὸ x_1 υἱνούμενον ἐντὸς τοῦ ὀρισθέντος ἡμιδίσκου· με' ἄλλους λόγους εάν ὀρίσωμεν ὡς τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος διὰ $t = x_1$ τὴν τιμὴν $\frac{-1}{1-k_1} (z_1-x_1)^{1-k_1}$.

Ὅθεν, τὸ ὁλοκλήρωμα (3) ἐντὸς τοῦ G κατὰ μῆκος τοῦ δρόμου ἀπὸ z_0 ἕως z δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\int_{z_0}^z f'(t) dt + \left\{ \int_{z_1}^z (t-x_1)^{1-k_1} \psi(t) dt + \int_{z_1}^z (t-x_1)^{-k_1} dt \right\}$$

καὶ συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω τὸ ὁλοκλήρωμα (3) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ z ὡς ἄθροισμα συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ z .

Ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς ἐφαρμόζεται εἰς τὰ $n-1$ σημεία x_j καὶ οὕτω ἡ κατασκευασθεῖσα συνάρτησις $F(z)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ χωρίον $G \equiv \eta m z \geq 0$.

Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν συμπεριφορὰν τῆς συναρτήσεως $F(z)$ τοῦ τύπου (3) εἰς τὸ σημεῖον $z = \infty$, ἐντελοῦμεν τὴν ἀντιματάσασιν $t = \frac{1}{t}$, καὶ παραλείποντες τοὺς τόνους εὐρίσκουμεν πάλιν:

$$F(z) = - \int_{1/z_0}^{1/z} \frac{dt}{t^{2-(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})} \cdot (1-a_1 t)^{\lambda_1} \dots (1-a_{n-1} t)^{\lambda_{n-1}}} \quad (5)$$

Έντεϋθεν τὸ ὁλοκλήρωμα (5) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ z εἰς τὸ σημείον $z=\infty$, ἐὰν $\lambda_n = 2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}) > -1$.

Ὡς ἐν τούτῳ ὑπάρχει τὸ $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \equiv W_n$. (6)

Ἡ συνάρτησις τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $f(z) = F(z) + B$, ὅπου B μιγαδικὴ σταθερά. Τελιωῶς ὁ μετασχηματισμός :

$$W = f(z) = A \cdot \int_{z_0}^z \frac{dt}{(t-x_1)^{k_1} (t-x_2)^{k_2} \dots (t-x_{n-1})^{k_{n-1}}} + B \quad (7)$$

καλεῖται μετασχηματισμός τῶν Schwartz-Christoffel.

Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (6) ἡ εἰκόνα w_n τοῦ $z=\infty$ ὑπάρχει καὶ εἶναι $w_n = W_n + B$.

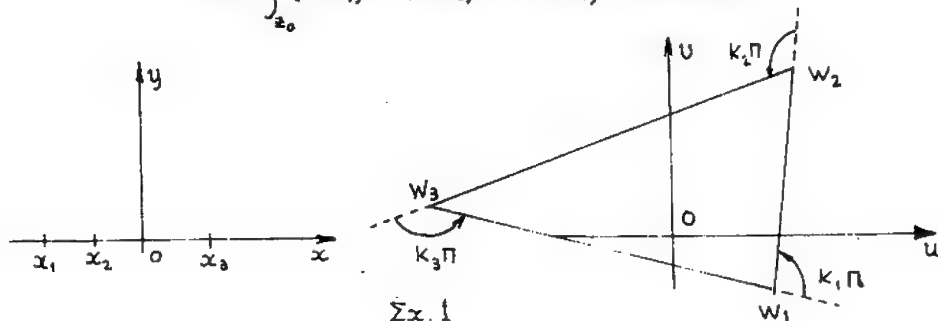
Συμφώνως πρὸς τ' ἄνωτέρω, ἐὰν μᾶς δοδοῦν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὰ σημεῖα $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ καὶ τὸ $x_n = \infty$ καὶ οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ πού ἱκανοποιοῦν τὴν σχέσιν: $k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} + k_n = 2$, τότε ὁ μετασχηματισμός (7) ἀπεικονίζει τὰ σημεῖα x_j ($j=1, 2, \dots, n-1$) εἰς τὰς κορυφὰς $w_j = f(x_j)$ ἑνὸς πολυγώνου, τὸ δὲ σημεῖον $x_n = \infty$ τὸ ἀπεικονίζει εἰς τὴν κορυφὴν $w_n = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) + B$.

Ἦτοι, διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (7) ὁ πραγματικὸς ἄξων ἀπεικονίζεται ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου. Ἀκριβέστερον:

Ὁ μετασχηματισμός (7) ἀπεικονίζει συμμόρφως τὸ ἀνοιχτὸν ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ ἐπὶ τοῦ ἐσωτερίου χωρίου τοῦ πολυγώνου $[W(x_1), W(x_2), \dots, W(x_{n-1}), W_n]$ καὶ τὸ κλειστὸν ἡμιεπίπεδον $\Im m z \geq 0$ ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ αὐτοῦ χωρίου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ πολύγωνον εἶναι ἓνα τρίγωνον μὲ κορυφὰς εἰς τὰ σημεῖα w_1, w_2 καὶ w_3 (βλ. Σχ. 1), ὁ μετασχηματισμός (7) γράφεται:

$$W = A \cdot \int_{z_0}^z (t-x_1)^{-k_1} (t-x_2)^{-k_2} (t-x_3)^{-k_3} dt + B.$$



Είναι δέ $k_1 + k_2 + k_3 = 2$. Αι σταθεραί A και B καθορίζουν τό μέγεθος και την θέσιν του τριγώνου. Εάν ή W_3 ληφθῇ ὡς ή εὐών του σημείου $x_3 = \infty$, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται, ὡς γνωστόν, τότε:

$$W = A \int_{z_0}^z (t-x_1)^{-k_1} (t-x_2)^{-k_2} dt + B.$$

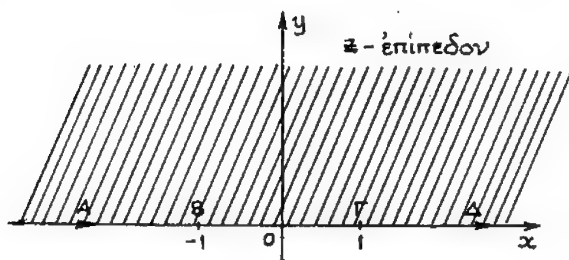
Παρατήρησις: Εἰς τήν περίπτωσιν του τριγώνου πρέπει νά λάβωμεν τρία σημεία x_1, x_2, x_3 ἐπὶ του ἄξονος ox ή δύο, εάν $x_3 = \infty$ και νά καθορίσωμεν ἐν τῶν προτέρων τά σημεία του W -ἐπιπέδου που θέλομεν ταῦτα νά ἀπεικονίζονται.

• Δοθέντος ἑνός πολυγώνου P ἄς ἐξετάσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν σταθερῶν εἰς τόν μετασχηματισμόν τῶν Schwartz-Christoffel, αἱ ὁποῖαι πρέπει νά προσδιορισθοῦν διὰ νά ἀπεικονίζεται ὁ ἄξων x ἐπὶ του P . Δι' αὐτόν τόν συσπόν δύναμεθα νά γράψωμεν $z_0 = 0$, $A = 1$ και $B = 0$ και ἀπλῶς νά ἀπαιτήσωμεν ὅτι, ὁ ἄξων x δύναται νά ἀπεικονίζεται ἐπὶ ἑνός πολυγώνου P' ὁμοίου πρὸς τό P . Τό μέγεθος και ή θέσις του P' δύναται τότε νά καθορισθοῦν ὡς πρὸς τό ὁμοῖον πρὸς αὐτό πολύγωνον P διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἐν τῶν προτέρων τῶν σταθερῶν A και B .

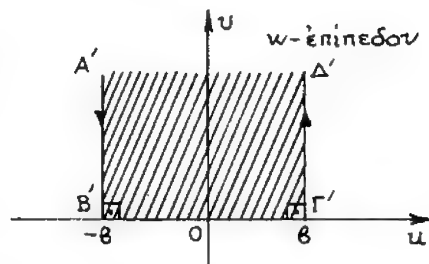
Οἱ ἀριθμοί k_j προσδιορίζονται πάντες ἀπό τὰς ἐξωτερικὰς γωνίας εἰς τὰς κορυφὰς του πολυγώνου P . Αἱ $n-1$ σταθεραί x_j πρέπει νά ἐυλεγοῦν. Ἡ εὐόνα του ἄξονος x εἶναι κάποιο πολύγωνον P' τό ὁποῖον ἔχει τὰς αὐτάς γωνίας μέ τό P . Ἀλλὰ εάν τό P' ὀφείλῃ νά εἶναι ὁμοῖον πρὸς τό P , τότε αἱ $n-2$ διαδοχικαί πλευραὶ πρέπει νά ἔχουν ἕναν κοινόν λόγον ὡς πρὸς τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς του P . Αὕτή ή συνθήκη ἐμφράζεται μέσω $n-3$ ἐξισώσεων μέ τούς $n-1$ πραγματικούς ἀγνώστους x_j . Ὅθεν, δύο τῶν ἀριθμῶν x_j ή δύο σχέσεις μεταξὺ αὐτῶν δύνανται νά ἐυλεγοῦν αὐθαίρετως ὑπὸ τόν ὅρον ὅτι αὐταὶ αἱ $n-3$ ἐξισώσεις μέ τούς ἐναπομένοντας $n-3$ ἀγνώστους νά ἔχουν πραγματικὰς λύσεις.

Παραδείγματα 1^{ον} Νά προσδιορισθῇ μία συνάρτησις $w(z)$, ή ὁποία νά ἀπεικονίζῃ συμμόρφως τό ἄνω μέρος του z -ἐπιπέδου ($\Im m z > 0$) εἰς τό δεικνύο-

μενον υπό του σχήματος χωρίον (λωρίδα) του w -επιπέδου.



Σχ. 1α



Σχ. 1β

Λύσις: Δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τό χωρίον (λωρίδα) $A'B'\Gamma'\Delta'$ ως μίαν οριατήν περίπτωσιν ενός τριγώνου μέ δύο υορυφάς τά σημεία B' καί Γ' καί τήν τρίτην υορυφήν τήν $A'\eta\Delta'$ εἰς τό ἄπειρον.

Ἐπειδή αἱ γωνίαι B' καί Γ' εἶναι ἴσαι πρὸς $\frac{\pi}{2}$, ἔπεται ὅτι $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$. Θεωροῦντες ἐπὶ του ἄξονος τῶν x τά σημεία $x_1 = -1$ καί $x_2 = 1$, ὁ τύπος (7) τῆς ὑπὸ ξ II, παραλείποντες τά ὅρια ὁλοκληρώσεως, γράφεται:

$$W(z) = A \cdot \int \frac{dz}{(z+1)^{1/2} \cdot (z-1)^{1/2}} + B = A \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} + B \quad \eta'$$

$$W(z) = k \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} + B, \quad \text{ὅπου } k = \frac{A}{i}$$

Ὅθεν, $w(z) = k \text{ τοξημ } z + B$.

Ἀρυεῖ νά προσδιορισθοῦν αἱ σταθεραί k καί B .

Ἐστω ὅτι εἰς τό $x_2 = 1$ ἀντιστοιχεῖ τό $w = \theta$ καί εἰς τό $x_1 = -1$ ἀντιστοιχεῖ τό $w = -\theta$, ὅτε ἐκ του ἀνωτέρω τύπου λαμβάνομεν:

$$\theta = k \text{ τοξημ } 1 + B = \frac{k\pi}{2} + B$$

$$-\theta = k \text{ τοξημ } (-1) + B = \frac{-k\pi}{2} + B$$

Δι' ἐπιλύσεως του ἀνωτέρω συστήματος εὐρίσκουμεν $B = 0$, $k = \frac{2\theta}{\pi}$.

Ὅθεν ὁ ζητούμενος μετασχηματισμός εἶναι $w = \frac{2\theta}{\pi} \text{ τοξημ } z$.

2%. Νά προσδιορισθῇ μία συνάρτησις $w(z)$, ἡ ὁποία νά ἀπεικονίσῃ συμμόρφως τά ἄνω ἡμιεπίπεδον $\eta \text{Im } z > 0$ ἐπὶ του ἐσωτερικοῦ του τομέως

$$0 < \alpha \arg w < \alpha \pi, \quad 0 < \alpha < 2.$$

Λύσις: Ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς τομεὺς εἶναι ἓνα πολυγώνιον μέ υορυφάς τὰ σημεῖα A_1 ($w=0$) καὶ A_2 ($w=\infty$), τὸ ὁλοκλήρωμα τῶν Schwartz-Christoffel δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος. θέτομεν τὴν αὐόλουδον ἀντιστοιχισιν τῶν σημείων τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος πρὸς τὰς υορυφάς τοῦ δοθέντος πολυγώνου:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 0 &\longrightarrow A_1 (w=0) \\ x_2 = \infty &\longrightarrow A_2 (w=\infty) \end{aligned} \right\} (1)$$

Εἶναι δέ, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τομέως:

$$\Pi - \alpha \cdot \Pi = (1 - \alpha) \cdot \Pi. \text{ Ὅθεν } k_1 = 1 - \alpha.$$

Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον (7) τῆς ὑπό-§, II καὶ θέτοντες $z_0 = 0$ λαμβάνομεν:

$$w(z) = A \cdot \int_0^z t^{\alpha-1} dt + B \quad (2) \quad \text{ἢ}$$

$$w(z) = \frac{A}{\alpha} \cdot z^{\alpha} + B \quad (3)$$

λόγω τῆς (1) ἐν τῆς (3) εὐρίσκομεν $B = 0$.

Ὅθεν, $w(z) = \frac{A}{\alpha} \cdot z^{\alpha} \quad (4)$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς σταθερᾶς A ἀρκεῖ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχισιν νὰ θέσωμεν καὶ μίαν ἐπὶ πλεόν ἀπαίτησιν. Ἐστω π.χ. εἰς τὸ $x_3 = 1 \longrightarrow w=1$ καὶ οὕτω προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τῆς αὐθαίρετου σταθερᾶς ἐν τῆς (4) καὶ εὐρίσκεται $A = \alpha$.

Ὅθεν, ἡ ζητούμενη συνάρτησις εἶναι $w = z^{\alpha}$.

39%. Νὰ προσδιορισθῇ μία συνάρτησις $w(z)$, ἡ ὁποία νὰ ἀπεικονίσῃ συμμόρφως τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἐσωτεριοῦ ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Λύσις. Διὰ ἓνα ἰσοπλευρὸν τρίγωνον ἔχομεν $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{2}{3}$. Εἶναι κατὰ ληθὸν νὰ γράψωμεν $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ καὶ $x_3 = \infty$, καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς τύπους (7) τῆς ὑπό-§ II, ὅταν $z_0 = 1$, $A = 1$ καὶ $B = 0$.

Οὕτω ὁ μετασχηματισμός γίνεται.

$$w = \int_1^z (t+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (t-1)^{-\frac{2}{3}} dt \quad (1)$$

Ἡ ἐκκέντρωση τοῦ $z=x_2=1$ εἶναι, λόγω τοῦ (1), $w(1)=0$ δηλ. τὸ $w_2=0$. Ὄταν $z=x_1=-1$, εἰς τὸ ὁλοκληρώμα (1) δύναμεθα νὰ γράψωμεν $t=x$ τότε $-1 < x < 1$ καὶ $x+1 > 0$ καὶ $\arg(x+1)=0$ καὶ $|x-1|=1-x$ καὶ $\arg(x-1)=\pi$. Ὄθεν, τὸ (1) γράφεται:

$$w_1 = \int_1^{-1} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \exp\left(\frac{-2\pi i}{3}\right) \cdot dx \quad \eta$$

$$w_1 = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}} \quad (2)$$

Ἄν καθέσωμεν θ τὴν τιμὴν τοῦ τελευταίου ὁλοκληρώματος τότε θά ἔχωμεν:

$$\theta = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Θέτοντες $x^2=t$ τὸ ἀνωτέρω ὁλοκληρώμα ἀνάγεται εἰς τὸ ὁλοκληρώμα:

$$\theta = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{3}-1} dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} \quad (\text{βλ. επε})$$

Κεφ. IX Ἀσκήσεις 16)

Συνεπῶς $w_1 = \theta \exp \frac{\pi i}{3}$.

Ἡ κορυφή w_3 εὐρίσκεται βάσει τοῦ τύπου (6) τῆς ὑπό-§ II καὶ εἶναι:

$$w_3 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \int_1^{\infty} (x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} \quad (3)$$

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος (3) ἐπιτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x^2 = \frac{1}{t}$, ὅποτε τοῦτο μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὁλοκληρώμα:

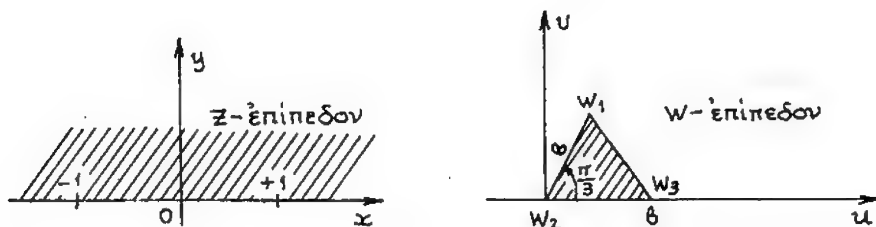
$$w_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{5}{6}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{6}-1} (1-t)^{\frac{1}{3}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)}$$

Θά δείξωμεν ὅτι $w_3 = \beta$. Πρὸς τούτοις ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \quad \eta \quad \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = 2 \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

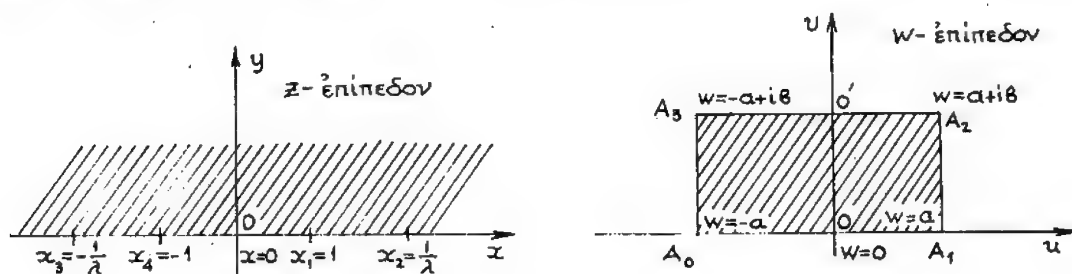
Πράγματι, γνωρίζομεν ὅτι διὰ $0 < p < 1$ ἰσχύει $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ (βλ. ἄ-
υση 24 σελ. 254, τόμος II).

ὁδον, $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{\pi \mu \frac{\pi}{6}} = 2\pi = 2(\sqrt{\pi})^2 = 2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$. (γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$). Ἀρα $w_3 = \theta$. (βλ. Σχ. (2)).



Σχ. 1

49%. Νά εὐρεθῇ μία συνάρτησις $W(z)$, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει συμμόρφως τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου $A_1 A_2 A_3 A_4$ (βλ. Σχ. 4).



Σχ. 4.

Λύσις: Ἐστω ὅτι αἱ κορυφαί τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τὸ w -επίπεδον εἶναι τὰ σημεῖα $A_1 (w=a)$, $A_2 (w=a+i\theta)$, $A_3 (w=-a+i\theta)$, $A_4 (w=-a)$.

Ἐπειδὴ τὸ ὀρθογώνιον $A_1 A_2 A_3 A_4$ εἶναι συμμετρίον ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν u , εἶναι φυσικὸν νὰ θεωρήσωμεν τοιαύτην ἀπεικόνισιν πού νὰ ἀπεικονίσῃ συμμετρία σημεῖα τοῦ ἄξονος x ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν του 0 εἰς συμμετρία σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρὸς τὸν u . Οὕτω λοιπὸν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν ἀντιστοιχίαν:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = 1 &\longrightarrow A_1 (w=a) \\ x_4 = -1 &\longrightarrow A_4 (w=-a) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\text{καὶ } x = 0 \longrightarrow w = 0. \quad (2)$$

Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) ὁρίζουν μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τριῶν συνοριακῶν

σημείων τῶν δύο τύπων.

Εἶναι ὁθεν, ἀδύνατον νὰ καθορίσωμεν αὐθαίρετως ἐπὶ τοῦ ἄξονος οἱ τὸ σημείον x_2 τοῦ ὁποίου ἡ εὐκὴν μέσω τῆς $W(z)$ νὰ δίδῃ τὴν κορυφὴν A_2 τοῦ ὀρθογωνίου. Ἄν ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι τὸ σημείον x_2 τοῦ ἄξονος οἱ μὲ τετμημένην ἴσην πρὸς $-\frac{1}{\lambda}$ (ἡ τιμὴ τῆς ὁποίας θὰ καθορισθῇ ἀργότερον) δίδει τὴν κορυφὴν A_2 . Προφανῶς $0 < \lambda < 1$. Λόγω δὲ τῆς συμμετρίας καὶ τὸ σημείον $x_3 = -\frac{1}{\lambda}$ θὰ δίδῃ τὴν κορυφὴν A_3 . Προφανῶς ἔχομεν $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = \frac{1}{2}$. Οὕτω πληροῦται ἡ συνθήκη $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 2$.

Ὅθεν, ἡ συνάρτησις ἡ ὁποία ὀρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἄνω ἡμιπεπιδέδου ἐπὶ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$w = f(z) = C \cdot \int_{z_0}^z (t+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t-\frac{1}{\lambda})^{-\frac{1}{2}} \cdot (t+\frac{1}{\lambda})^{-\frac{1}{2}} \cdot (t+1)^{-\frac{1}{2}} dt + C_1 \quad (3)$$

Θέτοντες $z_0 = 0$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (2) εὐρίσκομεν $C_1 = 0$. Οὕτω τελικῶς ἡ (3) γράφεται:

$$w = C \cdot \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (1-\lambda^2 t^2)}} \quad (4)$$

Παραμένει ἤδη νὰ προσδιορισθοῦν αἱ σταθεραὶ C καὶ λ ἀπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων x_1 καὶ x_2 τοῦ ἄξονος x καὶ τῶν κορυφῶν A_1 καὶ A_2 .

Τὸ ὁλοκλήρωμα (4) δὲν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ στοιχειωδῶν συναρτήσεων. (βλ. σχετικῶς Τόμος I, κεφ. XVIII, § 8, ἐλλειπτικὰ ὁλοκληρώματα). Εἶναι τῷ το, ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων, ἓνα ἐλλειπτικόν ὁλοκλήρωμα πρώτου εἶδους καὶ τὸ ὁποῖον συνήθως παρίσταται ὡς κατωθί:

$$F(z, \lambda) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} \quad (5).$$

Αἱ συνθῆκαι (1) δίδουν:

$$a = C \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} \quad (6).$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς σχέσεως (6) - προφανῶς εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ t

είναι πραγματική μεταβλητή - υαλίζεται *πλήρες έλλειπτιυόν όλουθήρωμα πρώτου είδους* υαί παρίσταται ως υάτωδι:

$$K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (1-\lambda^2 t^2)}} \quad (7)$$

Η $K(\lambda)$ είναι μία συνάρτησις έπαριως μελετημένη.

Η άντιστοιχισις των σημείων: $x_1 = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow A_2 (W = a + i\beta)$ μας έπιτρέπει νά γράψωμεν:

$$a + i\beta = C \cdot \left\{ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1-\lambda^2 t^2)}} \right\} \quad (8)$$

Λαμβάνοντες υν' όψιν υαί την (6), έυ της (8) έχομεν τελιυως:

$$\beta = C \cdot \int_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-\lambda^2 t^2)}} \equiv C \cdot \tilde{F}\left(-\frac{1}{\lambda}, \lambda\right) \quad (9)$$

όπου τό όλουθήρωμα της (9) παρίσταται υπό του συμβόλου $\tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$.

Έυ των σχέσεων (6) υαί (9) προφανως λαμβάνομεν την συναρτησιαήν είίσωαν:

$$a \cdot \tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right) = \beta \cdot K(\lambda) \quad (10)$$

Μέ δεδομένα λοιπόν τὰ a υαί β διά έπιλύσεως της (10) δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν την τιμήν λ υαί λόγω της (6) υαί την τιμήν C .

Ουτω, η συνάρτησις (4) η όποια άπειυονίσει τό άνω ήμιεπίπεδον $\eta m z > 0$ συμμόρφως έπί του έσωτεριου του δοθέντος όρθογωνίου εις τό w -επίπεδον, ώρίσθη πλήρως.

Έάν αι σταθεραί λ υαί C δίδονται εις τον τύπον (4), τότε αυτή η συνάρτησις όρίζει μιαν σύμμορφον άπειυόνισιν του άνω ήμιεπιπέδου $\eta m z > 0$ έπί του έσωτεριου υάποιου όρθογωνίου του w -επιπέδου, ό λόγος των πλευρών $\left(\frac{a}{\beta}\right)$ αυτου υαθορίζεται υπό της (10) υαί η άπόλυτος τιμή των πλευρών υαθορίζεται υπό της σταθεράς C , λόγω της (9). Μεταβάλλοντες τας τιμάς λ υαί C θα έχωμεν προφανως μιαν άλλην σύμμορφον άπειυόνισιν του άνω ήμιεπιπέδου $\eta m z > 0$ έπί του έσωτεριου υάποιου όρθογωνίου του w -επιπέδου.

52%. Νά εύρεθι μία σύμμορφος άπειυόνισις η όποια νά άπειυονίσει τό έσωτεριον του μοναδιαίου υύυλου έπί του έσωτεριου ενός πολυγώνου.

Λύσις: Ὡς γνωστόν ἓνα πολύγωνον τοῦ W - ἐπιπέδου δύναται νά θεωρηθῇ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel ὅτι εἶναι ἡ ἀπειρόνισις τοῦ ἄξονος ox ἐπὶ τῶν πλευρῶν του, τὸ δὲ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ ἀπειρο- νίζεται ἐπὶ τοῦ ἐσωτερίου τοῦ πολυγώνου.

Ὁ τύπος λοιπὸν τῶν Schwartz-Christoffel εἶναι:

$$w = A \int \frac{dz}{(z-x_1)^{k_1} (z-x_2)^{k_2} \dots (z-x_n)^{k_n}} + B \quad (1)$$

μέ $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 2$.

(ὅπου παρελήφθησαν τὰ ὅρια τῆς ὁλοκληρώσεως καὶ ἀντὶ τοῦ t θεωρήσα- μεν τὸ z).

Ἐνας μετασχηματισμός που ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$ τοῦ η - ἐπιπέδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\eta = \frac{i-z}{i+z} \quad \text{ἢ} \quad z = i \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right) \quad (2)$$

(βλ. σχετικῶς Κεφ. V, § 4, Ἐφαρμογή) ὅπου ἐλάβαμεν $\theta = \pi$, $z_0 = i$.

Ἐάν τὰ σημεῖα x_1, x_2, \dots, x_n τοῦ ἄξονος ox ἀπεικονίζονται μέσω τῆς (2) εἰς τὰ σημεῖα $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ἀντιστοίχως τῆς περιφέρειας τοῦ μοναδιαίου κύκλου, τότε θὰ ἔχωμεν διὰ $k=1, 2, \dots, n$.

$$z-x_k = i \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right) - i \left(\frac{1-\eta_k}{1+\eta_k} \right) = \frac{-2i(\eta-\eta_k)}{(1+\eta)(1+\eta_k)} \quad (3)$$

Ἐπίσης $dz = \frac{-2i d\eta}{(1+\eta)^2}$. Ἀντιυαδιστώντες εἰς τὴν (1) τὰ $z-x_k$ τὰ διδόμενα ὑπὸ τῶν (3), ἡδῶς καὶ τὸ dz , λαμβάνομεν:

$$w = (-2i)^n \cdot A \cdot \int \frac{(1+\eta)^{k_1} (1+\eta_1)^{k_1} \dots (1+\eta)^{k_n} (1+\eta_n)^{k_n}}{(1-\eta)^{k_1} \dots (1-\eta_n)^{k_n}} \cdot \frac{-2i}{(1+\eta)^2} d\eta + B \quad (4)$$

λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $(1+\eta)^{k_1} \dots (1+\eta)^{k_n} = (1+\eta)^2$ καὶ μετὰ τὰς ἀ- πλοποιήσεις λαμβάνομεν ἔν τοῦ (4):

$$w = (-2i)^{n+1} (1+\eta_1)^{k_1} \dots (1+\eta_n)^{k_n} \cdot A \cdot \int \frac{d\eta}{(\eta-\eta_1)^{k_1} \dots (\eta-\eta_n)^{k_n}} + B \quad (5)$$

ἢ θέτοντες $(-2i)^{n+1} (1+\eta_1)^{k_1} \dots (1+\eta_n)^{k_n} \cdot A = A'$ θὰ ἔχωμεν:

$$w = A' \cdot \int \frac{d\eta}{(\eta-\eta_1)^{k_1} \dots (\eta-\eta_n)^{k_n}} + B \quad (6)$$

Ούτω ο μετασχηματισμός (6) απεικονίζει το εσωτερικόν του μοναδιαίου κύκλου $|\eta|=1$ επί του εσωτερικοῦ του πολυγώνου, αἱ δὲ κορυφαί του πολυγώνου εἶναι αἱ εἰσόνες τῶν σημείων η_k του κύκλου μέσω του μετασχηματισμοῦ (6).

6%/ Νά κατασκευασθῇ μία συνάρτησις $w(z)$ ἡ ὁποία νὰ ἀπεικονίσῃ συμμόρφως τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im z > 0$ ἐπὶ του εσωτερικοῦ ἑνὸς τριγώνου.

Λύσις: Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ σύνορον εἶναι ἓνα ἀπλό πολύγωνο. Ἐστω ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι αὐτοῦ του τριγώνου εἶναι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ὡστε $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$. Ἐὰν θέσωμεν $k_1 = 1 - \alpha_1$, $k_2 = 1 - \alpha_2$, $k_3 = 1 - \alpha_3$, τότε αἱ συνθήκαι (5) τῆς ὑπό-ξ, I ὑα-νοποιούνται.

Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ καὶ ὁ τύπος (7) τῆς ὑπό-ξ, II μὲ $B = 0$ καὶ $z_0 = 0$ γράφεται:

$$w(z) = A \cdot \int_0^z \frac{dt}{t^{k_1} (t-1)^{k_2}} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $(t-1)^{k_2} = (-1)^{k_2} (1-t)^{k_2}$, ὁ (1) γράφεται

$$w(z) = \frac{A}{(-1)^{k_2}} \int_0^z \frac{dt}{t^{k_1} (1-t)^{k_2}} = \frac{A}{(-1)^{k_2}} \int_0^z t^{a_1-1} (1-t)^{a_2-1} dt \quad (2)$$

Θέτοντες δὲ $\frac{A}{(-1)^{k_2}} = 1$, ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει:

$$w(z) = \int_0^z t^{a_1-1} (1-t)^{a_2-1} dt \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } w(1) &= \int_0^1 t^{a_1-1} (1-t)^{a_2-1} dt = B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1 + a_2)} \\ &= \frac{\Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2)}{\Gamma(1 - a_3)} = \frac{1}{\pi} \Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2) \cdot \Gamma(a_3) \text{ ημ πα}_3 \end{aligned}$$

Ἐντεῦθεν, τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν κορυφὴν B_3 εἶναι:

$$\ell_3 = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2) \cdot \Gamma(a_3) \text{ ημ πα}_3.$$

Ευνόμως διαπιστώνεται, ότι τό μήκος τῆς πλευρᾶς τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν κορυφὴν B, εἶναι:

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \int_1^{\infty} t^{a_1-1} \cdot (t-1)^{a_2-1} dt = \int_0^1 t^{1-a_1} \cdot (1-t)^{a_2-1} \frac{dt}{t^{1+a_2}} \\ &= \int_0^1 t^{-(a_1+a_2)} \cdot (1-t)^{a_2-1} dt = \int_0^1 t^{a_3-1} \cdot (1-t)^{a_2-1} dt \quad \eta \end{aligned}$$

$$\ell_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2) \cdot \Gamma(a_3) \eta \mu \pi a_1$$

Σχεδόν διὰ τοῦ ἰδίου τρόπου εὐρίσκουμεν:

$$\ell_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \Gamma(a_1) \cdot \Gamma(a_2) \cdot \Gamma(a_3) \eta \mu \pi a_2$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τ' ἀνωτέρω ἀποτελέσματα συμφωνοῦν μέ τὸν κανόνα τοῦ ἡμιτόνου, ἥτοι: $\frac{\ell_1}{\eta \mu \pi a_1} = \frac{\ell_2}{\eta \mu \pi a_2} = \frac{\ell_3}{\eta \mu \pi a_3}$.

§ 5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΩΝ ΥΠΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ

• Ἐστω μία καμπύλη (γ) τοῦ z-ἐπιπέδου κλειστή ἢ ὅχι ἔχουσα ὡς παραμετρίως ἐξισώσεις τὰς $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, ὅπου αἱ συναρτήσεις φ, f εἶναι διαφορίσιμοι.

Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $z = \varphi(w) + i \cdot f(w)$ (1)

Λέγομεν ὅτι οὗτος ἀπεικονίζει τὴν (γ) εἰς τὸν πραγματικὸν ἄξονα τοῦ w-ἐπιπέδου.

Πράγματι, θέτοντες $z = x + iy$ καὶ $w = u + iv$ ὁ (1) γράφεται:

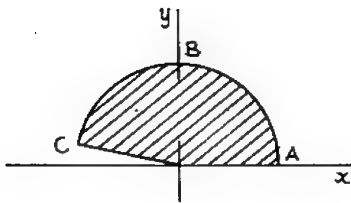
$$x + iy = \varphi(u + iv) + i f(u + iv) \quad (2)$$

Ὁ πραγματικὸς ἄξων τοῦ w-ἐπιπέδου εἶναι ὁ $v=0$ καὶ λόγῳ τῆς (2), θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὴν καμπύλην $x + iy = \varphi(u) + i f(u)$, ἥτοι τὴν καμπύλην μέ ἐξισώσεις: $x = \varphi(u)$, $y = f(u)$ δηλ. τὴν (γ).

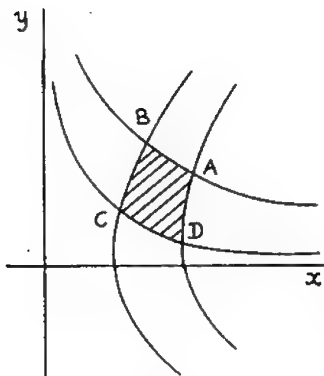
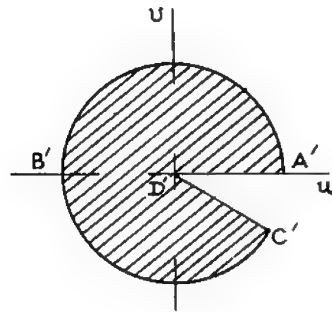
Ἐφαρμογή: Νὰ εὕρεθῇ ὁ μετασχηματισμὸς ποὺ ἀπεικονίζει τὴν ἑλλειψιν $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ τοῦ z-ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τοῦ w-ἐπιπέδου.

Λύσις: Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως εἶναι $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι: $z = a \cos w + i b \sin w$.

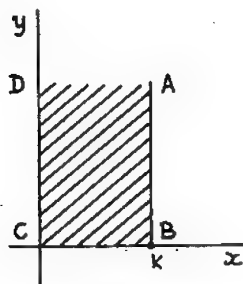
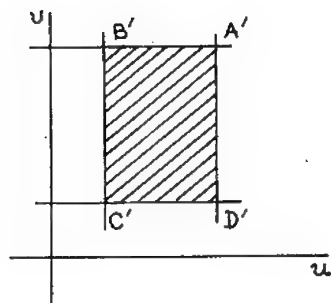
ΠΙΝΑΞ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΧΩΡΙΩΝ ΥΠΟ ΣΥΜΜΟΡΦΟΥ
ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ



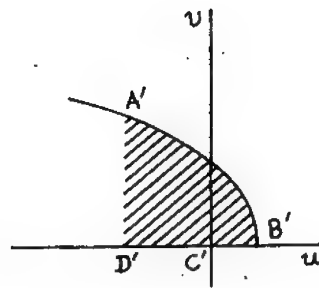
Σχ. 1
 $W = z^2$



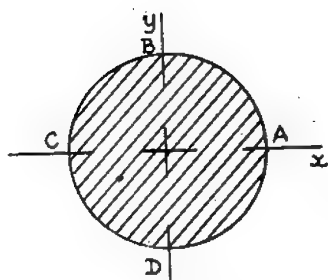
Σχ. 2
 $W = z^2$



Σχ. 3

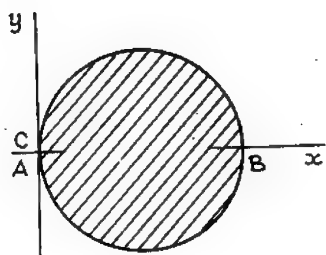
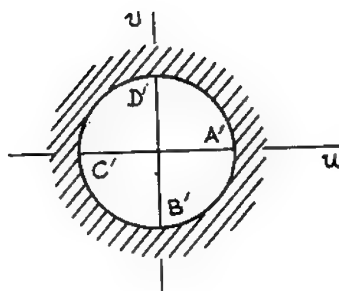


$W = z^2$, A', B' τόξα παραβολής $p = \frac{2k^2}{1 + \sin \phi}$



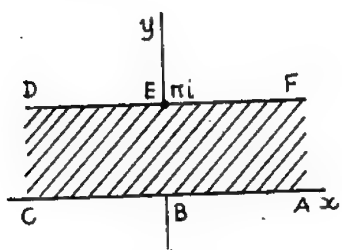
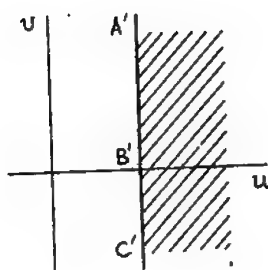
$\Sigma x. 4.$

$$w = \frac{1}{z}$$



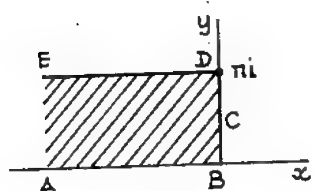
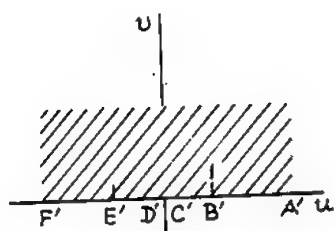
$\Sigma x. 5$

$$w = \frac{1}{z}$$



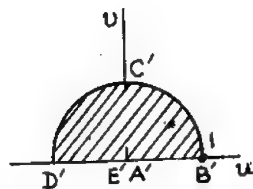
$\Sigma x. 6$

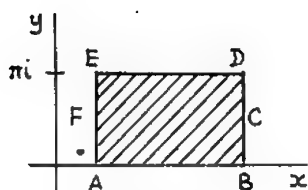
$$w = e^z$$



$\Sigma x. 7$

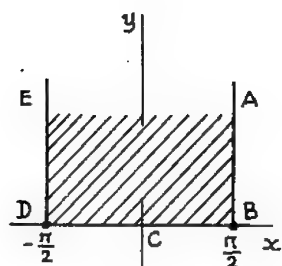
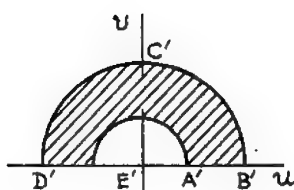
$$w = e^z$$





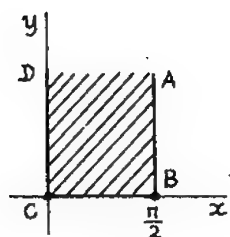
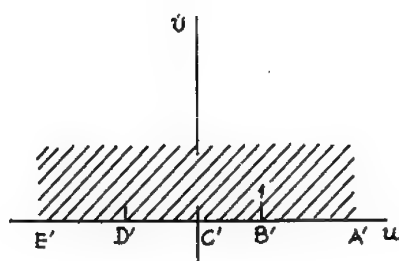
Σx. 8

$$w = e^z$$



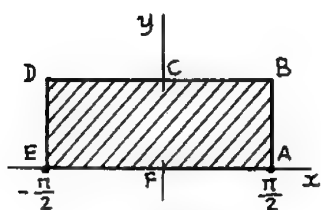
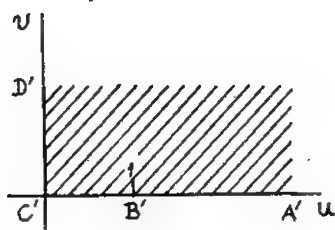
Σx. 9

$$w = \eta \mu z$$

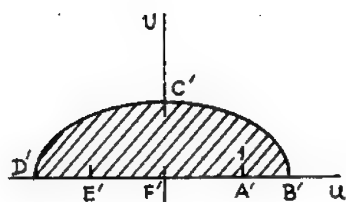


Σx. 10

$$w = \eta \mu z$$

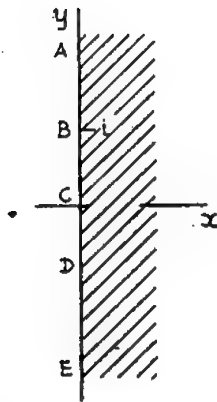


Σx. 11



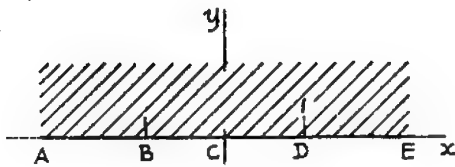
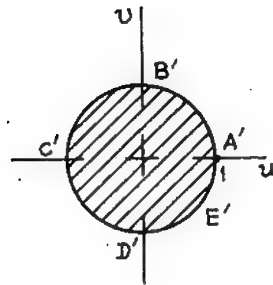
$w = \eta \mu z$ BCD ή γραμμή $y = k$, B'C'D' τόξου ελλείψεως

$$\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh k}\right)^2 = 1$$



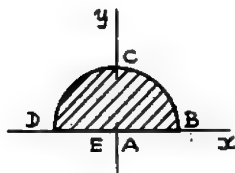
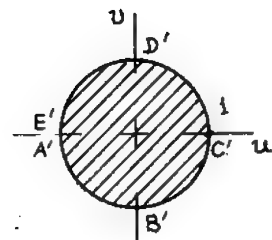
Σx.12

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$



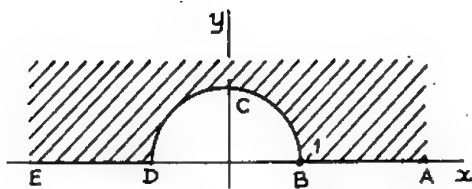
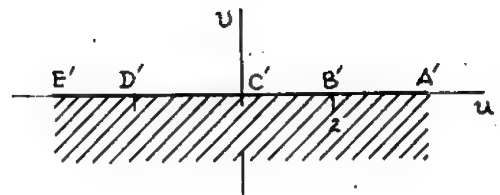
Σx.13

$$w = \frac{1-z}{1+z}$$



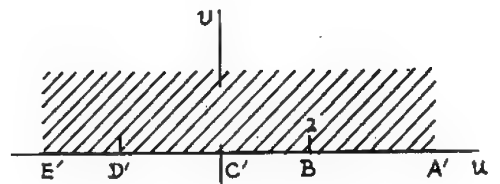
Σx.14

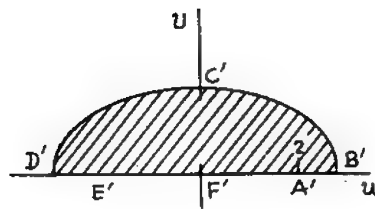
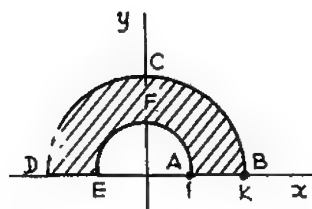
$$w = z + \frac{1}{z}$$



Σx.15

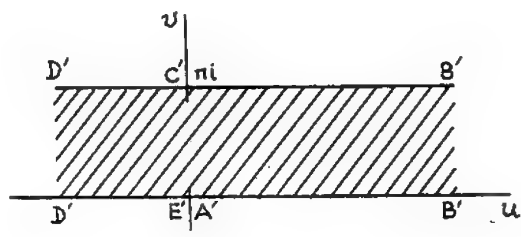
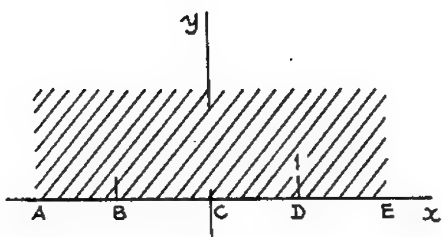
$$w = z + \frac{1}{z}$$





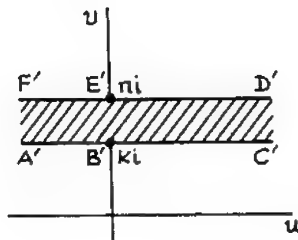
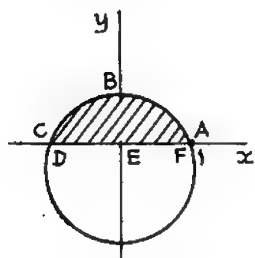
Σx. 16

$$w = z + \frac{1}{z}, B'C'D' \text{ τόξον ἐλλείψεως } \left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1.$$



Σx. 17

$$w = \log \frac{z-1}{z+1}, z = -\coth \frac{w}{2}$$



Σx. 18

$$w = \log \frac{z-1}{z+1}, ABC \text{ τό ήμισυκύκλιον } x^2 + y^2 - 2y \operatorname{ar} k = 1.$$

Συμπληρώματα και άσκησεις

I. Μετασχηματισμός των χωρίων

1. Έστω το χωρίον G του z -επιπέδου ορισμένον υπό των ευθειών $x=0, y=0, x=2, y=1$. Νά προσδιορισθῇ το χωρίον G' του w -επιπέδου, το ὁποῖον εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ G ὑπὸ τῶν μετασχηματισμῶν:
i). $w=z+(1-2i)$, ii). $w=\sqrt{2} e^{i\pi/4} z$, iii). $w=\sqrt{2} e^{i\pi/4} z+(1-2i)$
2. Νά προσδιορισθῇ το χωρίον τοῦ w -επιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποῖου ἀπεικονίζεται ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=z^2$ τὰ κατωθὶ χωρία:
i) Τὸ πρῶτον τέταρτον τοῦ z -επιπέδου
ii) Τὸ χωρίον ποὺ περιορίζεται ὑπὸ τῶν ευθειῶν $x=1, y=1$ καὶ $x+y=1$.
3. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἡ $w=f(z)=u(x,y)+i v(x,y)$ εἶναι ἀναλυτικὴ ἐπὶ τοῦ χωρίου G , τότε θά ἔχωμεν:
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$$
4. Δίδεται εἰς τὸ z -επίπεδον ἓνα τρίγωνον T με κορυφὰς τὰ σημεῖα $i, 1-i, 1+i$. Νά εὗρεθῇ ἡ εἰκὼν αὐτοῦ εἰς τὸ w -επίπεδον ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=z+\frac{1}{z}$.
5. Ἡ ἀναλυτικὴ συνάρτησις $w=F(z)$ ἀπεικονίζει τὸ ἔσωτεριόν G ἑνὸς κύκλου C , ὁρισμένου ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $|z|=1$, εἰς ἓνα χωρίον G' ποὺ φράσσεται ὑπὸ μιᾶς ἀπληθὺς κλειστῆς καμπύλης C' . Δείξατε ὅτι: i) Τὸ μήκος τῆς C' εἶναι $\oint_C |F'(z)| |dz|$.
ii) Τὸ ἔμβαδόν τοῦ G' εἶναι $\iint_G |F'(z)|^2 dx dy$.
6. Έστω z_0 ἓνα ἰδιόσον σημεῖον τῆς συναρτήσεως $f(z)$ καὶ ἔστω m εἶναι ὁ ἐλάχιστος θετικὸς ἀνέραιος τοιαῦτος, ὥστε $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Έστω ὅτι Γ εἶναι ἡ εἰκὼν ἑνὸς θείου τόξου C ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $w=f(z)$ (βλ. σχῆμα 1 §.1). Δείξατε ὅτι αἱ γωνίαι κατὰ τὴν w -εἰκὼν ικανοποιοῦν τὴν σχέσηιν:
$$\varphi_0 = m\theta_0 + \pi \arg [f^{(m)}(z_0)].$$

Εν συνεχεία δείξτε ότι, εάν a παριστᾷ τὴν γωνίαν μεταξὺ δύο λείων καμπύλων C_1 καὶ C_2 , ὅπως δεικνύεται εἰς τὸ Σχ.2 § 1, ἡ ἀντίστοιχος γωνία μεταξὺ τῶν εἰσόνων Γ_1 καὶ Γ_2 τῶν ἀνωτέρω καμπύλων θὰ εἶναι $\beta = m \cdot a$.

7. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ εἰσόνες τῶν κατωθι χωρίων ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $W = \exp z$.

i) Τῆς ἡμιθωρίδος $0 < x < \pi, y > 0$.

ii) Τῆς θωρίδος $0 < x < \pi$

iii) Τῆς θωρίδος $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

8. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ εἰσόνες τῶν κατωθι χωρίων ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ $W = \tanh z$.

i) Τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου ($\Im m z > 0$)

ii) Τοῦ πρώτου τετάρτου τοῦ z -επιπέδου.

iii) Τοῦ ἡμιεπιπέδου $x < 0$ ἐξ ὅσον ἀπουόσωμεν τὸ τμήμα $(-\infty, -1]$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος.

9. Νὰ εὐρεθῇ τὸ πεδίον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὁ μετασχηματισμός $w = \frac{1}{2} (z + \frac{1}{z})$ (Zoukowsky) ἀπεικονίσει:

i) Τὸν κύκλον $|z| < R < 1$ ii) Τὸ πεδίον $|z| > R > 1$ iii) Τὸν κύκλον $|z| < 1$.

iv) Τὸ πεδίον $|z| > 1$ v) Τὸ ἡμιεπιπέδον $\Im m z > 0$ vi) Τὸ ἡμιεπιπέδον $\Im m z < 0$

vii) Τὸ ἡμικύκλιον $|z| < 1, \Im m z > 0$ viii) Τὸ ἡμικύκλιον $|z| < 1, \Im m z < 0$

ix) Τὸ πεδίον $|z| > 1, \Im m z > 0$ x) Τὸ πεδίον $1 < |z| < R, \Im m z > 0$ xi) Τὸ πεδίον $\frac{1}{R} < |z| < R, \Im m z > 0, \Re z > 0$

xii) γωνία $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

10. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ εἰσόνες τῶν κατωθι πεδίων ὑπὸ τοῦ ἐναντι ἐμάστου διευνομένου μετασχηματισμοῦ:

i) κύκλου $|z| < 1$, ὑπὸ τοῦ $W = \frac{z}{z^2 + 1}$

ii) ἡμικύκλιου $|z| < 1, \Im m z > 0$, ὑπὸ τοῦ $W = \frac{1}{z^2 + 1}$

iii) τῆς γωνίας $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$, ὑπὸ τοῦ $W = \frac{1}{2} (z^n + \frac{1}{z^n})$.

II. Επί του μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel.

11. Δείξατε ὅτι ἡ εἰδιυή περίπτωσης :

$$w = i \int_0^z (t+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t-1)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

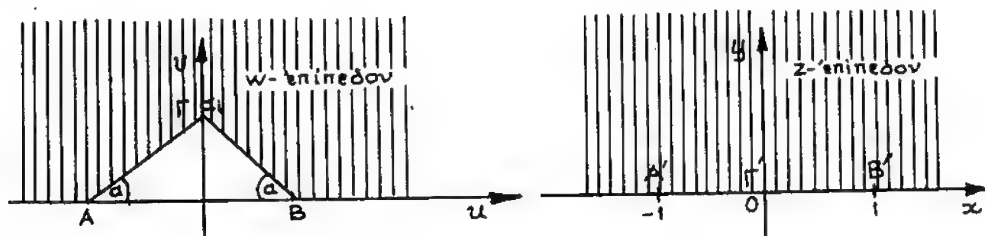
τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel, ἀπεικονίζει τὸν ἄξονα ox ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου μέ υορυφάς :

$$w_1 = bi, w_2 = 0, w_3 = b, w_4 = b + ib,$$

ὅπου ὁ θετιυός ἀριθμός b δίδεται ὑπό τῆς βῆτα συναρτήσεως διὰ τῆς ἀξέ-
σεως $b = \frac{1}{2} B(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

12. Νὰ εὔρεθῇ μία συνάρτησις $w(z)$ ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπιπεδον $\Im m z > 0$ εἰς τὸ γραμμοσυιασθέν μέρος τοῦ w -ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε :
 $z = -1 \rightarrow w = -\beta, z = 0 \rightarrow w = ai$ καὶ $z = 1 \rightarrow w = \beta$ (βλ. Σχ. 1).

Διερευνήσατε τὴν περίπτωση, ὅταν $\beta \rightarrow 0$



Σχ. 1

Λύσις: Αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι τοῦ γραμμοσυιασθέντος τμήματος εἰς τὰ ση-
μεῖα A καὶ B εἶναι $\pi - \alpha$, ἡ δὲ γωνία εἰς τὴν υορυφὴν Γ θὰ εἶναι $2\pi - (\pi - \alpha) =$
 $= \pi + 2\alpha$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν μετασχηματισμὸν τῶν Schwartz-Christoffel λαμ-
βάνομεν τελευτῶς :

$$w = A \int_0^z (t+1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}-1} \cdot t^{\frac{\pi+2\alpha}{\pi}-1} \cdot (t-1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}-1} dt + B = A \int_0^z \frac{t^{\frac{2\alpha}{\pi}} dt}{(t^2-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}} = k \cdot \int_0^z \frac{t^{\frac{2\alpha}{\pi}} dt}{(1-t^2)^{\frac{\alpha}{\pi}}} + B$$

Ὅταν $z = 0, w = ai$, τότε $B = ai$ καὶ ὁ ἄνωτέρω τύπος γράφεται :

$$w = k \cdot \int_0^z \frac{t^{\frac{2\alpha}{\pi}} dt}{(1-t^2)^{\frac{\alpha}{\pi}}} + ai$$

Ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς k δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῆς συναρτήσεως Γ , λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι, ὅταν $z=1$, ἔχομεν $w=\beta$, ὅτε εὐρίσκουμεν:

$$k = \frac{(\beta - a \cdot i) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)}$$

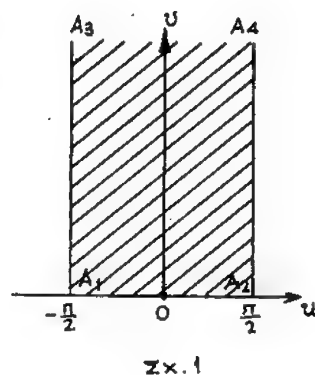
Ἐὰν $\beta \rightarrow 0$, τότε $a \rightarrow \frac{\pi}{2}$ καὶ τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα γίνεται:

$$w = ai - ai \int_0^z \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} = ai \sqrt{1-z^2} = a \sqrt{z^2-1},$$

13. Νὰ προσδιορισθῇ μία συνάρτησις, ἡ ὁποία νὰ ἀπεικονίσῃ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ ἐπὶ τῆς ἡμι-κυρίδος $-\frac{\pi}{2} < \Re w < \frac{\pi}{2}$, $\Im m w > 0$ (βλ. Σχ. 1).

θεωροῦντες τὴν ἀντιστοιχίαν:

$$z(-1, 1, \infty) \longrightarrow w\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \infty\right)$$



14. Εἰς ποῖον πεδῖον ἡ συνάρτησις

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

ἀπεικονίσῃ τὸν μοναδιαῖον δίσκον $|z| < 1$;

15. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $w(z) = \int_0^z (1-t^4)^{-\frac{1}{4}} dt$ μετασχηματίζει τὸν κύκλον $k(0,1)$ συμμόρφως εἰς τὸ ἔσωτεριόν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος n -πλευρὰς καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου.

16. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $w = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^6)^{\frac{1}{3}}}$ ἀπεικονίζει ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον ἐπὶ τοῦ

μοναδιαίου κύκλου. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ ἑξαγώνου;

17. Νὰ εὐρεθῇ μία συνάρτησις, ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπὶ τοῦ ἔσωτεριου ἑνὸς τριγώνου μέ κορυφὰς τὰ σημεῖα $w=0, 1, i$ ἀντιστοιχοῦντα

εἰς τὰ σημεῖα $z = 0, 1, \infty$ ἀντιστοίχως.

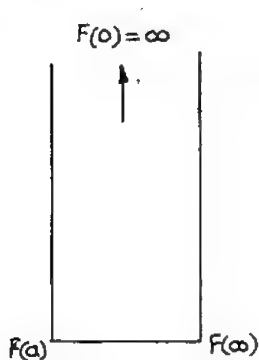
(Ἀπάντ. $w = \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{1}{4})} \cdot \int_0^z t^{-\frac{1}{4}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt$).

18. Νά ἀπεικονίσετε τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπὶ ἑνὸς ῥόμβου μέγωνίας $\pi \cdot \alpha$, $\pi(1-\alpha)$ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ κορυφαί του νὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ σημεῖα $z = 0, \mp 1, \infty$. Νά εὑρεθῇ τὸ μῆκος ℓ τῶν πλευρῶν του.

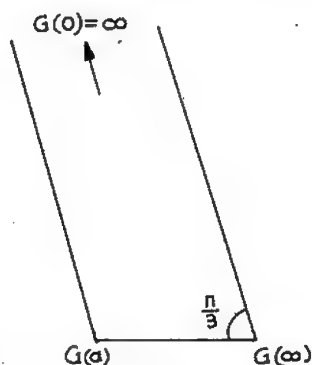
(Ἀπάντ. $w = \int_0^z t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$, $\ell = \frac{1}{4} [\Gamma(\alpha) \cdot \sin(\frac{\alpha\pi}{2})]^{-1} \Gamma^2(\frac{1}{2}\alpha)$).

19. α) Ἡ συνάρτησις $F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dt}{t\sqrt{t-a}}$, ὅπου z_0 εἶναι ἓνα αὐθαίρετον σταθερὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ὅπου $z > 0$ καὶ $a > 0$ μετασχηματίζει τὸ ἄνω ἡμιεπι-

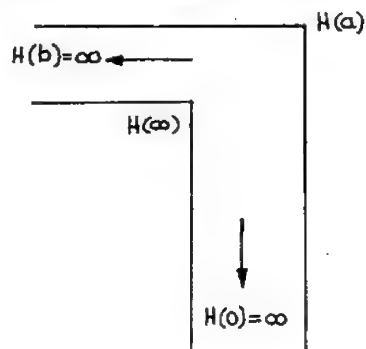
πέδον τοῦ ἐπιπέδου ὅπου $z > 0$ καὶ $a > 0$ μετασχηματίζει τὸ ἄνω ἡμιεπι-



Σx. 1



Σx. 2



Σx. 3

πέδον ὅπου $z \geq 0$ ἐπὶ τῆς ἡμιθωρίδος τῆς δεικνυομένης εἰς τὸ Σx.1 πλάτους $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

- β) Ἡ συνάρτησις $G(z) = \int_{z_0}^z \frac{dt}{t \cdot (t-a)^{1/3}}$ μετασχηματίζει τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον

ὅπου $z \geq 0$ ἐπὶ τοῦ ὑφειστοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τὸ Σx. 2

- γ) Ἡ συνάρτησις $H(z) = \int_{z_0}^z \frac{dt}{t \cdot (t-a)^{1/2} (t-b)}$, ὅπου $0 < a < b$ μετασχηματίζει

τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ὅπου $z \geq 0$ ἐπὶ τοῦ ὑφειστοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τὸ Σx. 3. Προσδιορίσατε τὰ πλάτη τῶν δύο θωρίδων ἐν τῶν ὁποίων συνίσταται αὐτὸ τὸ χωρίον.

20. Απεικονίστε το άνω ήμισυ επίπεδου $\Im m z > 0$ επί του πεδίου του w -επιπέδου με την υάτωδι ενός έυάστου στήματος δεικνυομένην αντίστοιχισν τών σημείων (βλ. Σχ. 1, - 15).

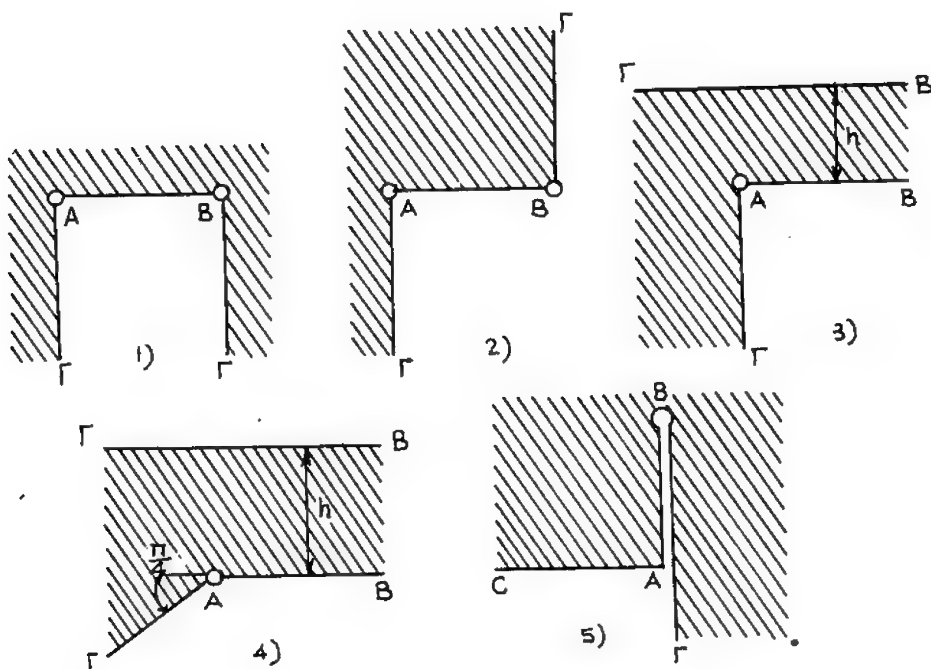
1) $w (A=0, B=1, \Gamma=\infty) \longrightarrow z (0,1, \infty)$

2) $w (A=0, B=1, \Gamma=\infty) \longrightarrow z (0,1, \infty)$

3) $w (A=0, B=\infty, \Gamma=\infty) \longrightarrow z (0,1, \infty)$

4) $w (A=0, B=\infty, \Gamma=\infty) \longrightarrow z (0,1, \infty)$

5) $w (A=0, B=ia, \Gamma=\infty) \longrightarrow z (0,1, \infty)$



Σχ. 1

Απάντησις:

1) $w = \frac{2}{\pi} [\omega \Xi \eta \mu \sqrt{z} - (1-2z) \sqrt{z-z^2}]$

2) $w = \frac{2}{\pi} [\omega \Xi \eta \mu \sqrt{z} - \sqrt{z-z^2}]$

3) $w = \frac{h}{\pi} (\log \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} - 2\sqrt{z})$

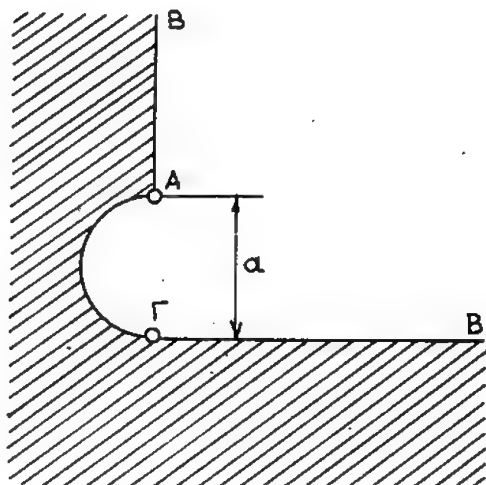
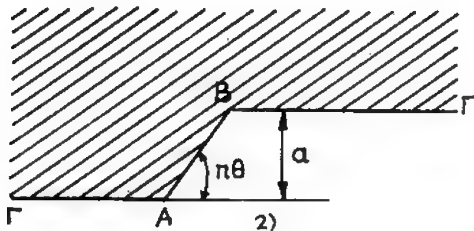
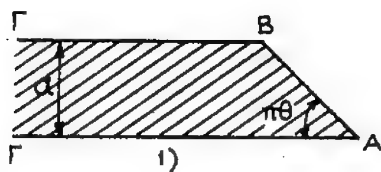
4) $w = \frac{2h}{\pi} (\omega \Xi \epsilon \varphi \sqrt[4]{z} + \operatorname{arctanh} \sqrt[4]{z} - 2\sqrt[4]{z})$

5) $w = ia (-\sqrt{z} \cdot \frac{z-3}{2} - 1)$

21. Άπειμονίσατε τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ εἰς τὸ χωρίον τοῦ w -ἐπιπέδου μέ-
τὴν υἅτωδι ἑνὸς ἐυδίστου σχήματος δεινουμενὴν ἀντιστοιχείσιν ($0 < \theta < 1$)
(βλ. Σχ. 2₁-2₂).

1) $w(A, B=0, \Gamma=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$

2) $\tilde{w}(A, B=0, \Gamma=\infty) \rightarrow z(0, 1, \infty)$



Ἀπάντησις:

1) $w = -\frac{a}{\pi} \int_1^z \frac{dz}{z^{1-\theta}(z-1)^\theta}$ Σχ. 2.

2) $w = \frac{a}{\pi \cdot \theta} \int_1^z \left(\frac{z-1}{z}\right)^\theta dz$

22. Άπειμονίσατε τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἐπὶ τοῦ χωρίου τοῦ δεινυομένου εἰς
τὸ Σχ. 2₃ (τὸ τόξον ΑΓ εἶναι ἕνα ἡμικύκλιον) εἰς τρόπον, ὥστε:

$w(A=a i, B=\infty, \Gamma=0) \rightarrow z(0, 1, \infty)$.

Ἰπὸδ. Χρησιμοποιεῖσατε τὸν μετασχηματισμὸν $\eta = \frac{a}{w}$ καὶ μετὰ ἀναχθῆτε εἰς
τὴν ἄσκησιν 21 (2).

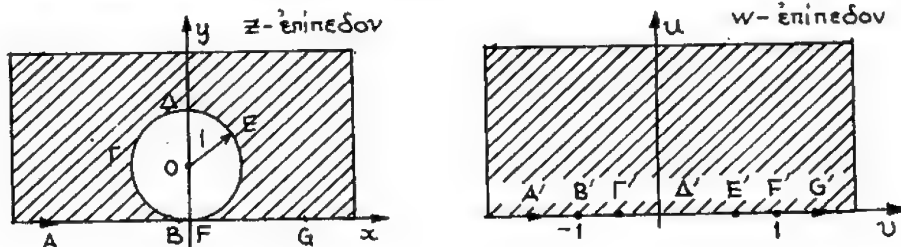
Ἀπάντησις:

$w = \frac{a}{\eta}$, ὅπου $\eta = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2t}{1-t^2} + \log \frac{1-t}{1+t} \right)$ καὶ $t = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$

III. Μετασχηματισμός συνόρων και διαφόρων χωρίων.

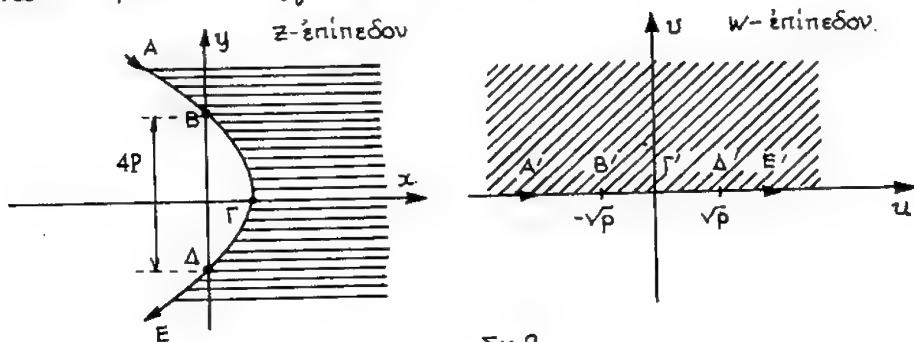
23. Νά εύρεθῇ ὁ μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τὴν ὑποκυλινδρική $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Εἰς ποῖον χωρίον ἀπεικονίζεται τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὑποκυλινδρικοῦς ὑπὸ τοῦ ἐν λόγῳ μετασχηματισμοῦ.

24. Δείξτε ὅτι ὁ μετασχηματισμός $w = \exp\left(\frac{\pi}{2} z\right)$ ἀπεικονίζει τὸ ἐξωτερικὸν μέρος τοῦ μοναδιαίου κύκλου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ z -ἐπιπέδου εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $\operatorname{Im} w > 0$ (βλ. Σχ. 1).
(Τὰ δεικνύμενα βέλη σημαίνουν ὅτι τὰ σημεῖα λαμβάνονται στὸ ∞).



Σχ. 1

25. Δίδεται ἡ παραβολή $y^2 = 4p(p-x)$. Δείξτε ὅτι ὁ μετασχηματισμός $w = i(\sqrt{x} - \sqrt{p})$ μετασχηματίζει τὸ γραμμοσυστοιχὴν ἐξωτερικὸν μέρος τῆς παραβολῆς εἰς τὸ ἄνω w -ἡμιεπίπεδον ($\operatorname{Im} w > 0$) (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ—ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET

§1. ΤΥΠΟΣ ΤΩΝ SCHWARTZ-POISSON

I. Τύπος τοῦ Schwarz.

Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(z)$, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ἀναλυτικὴ ἐπὶ τοῦ δίσκου $|z| \leq R$. Ἐστωὶ z εἶναι ἓνα τυχόν σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας C μετὰ ἔξωσιν $|z| = R$. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁλοκληρωτικὸν τύπον τοῦ Cauchy θὰ ἔχωμεν :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \cdot \frac{\eta}{\eta - z} d\varphi, \quad (1) \quad \text{ὅπου } \eta = R \cdot e^{i\varphi}.$$

ἘΕ ἄλλου, ἐὰν z^* εἶναι ἓνα σημεῖον ἐντὸς τῆς περιφερείας C , θὰ ἔχωμεν :

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\eta)}{\eta - z^*} d\eta \quad (2)$$

Εἰδιωὺς, ἐὰν λάβωμεν ὡς z^* τὸ συμμετρικόν $\frac{R^2}{\bar{z}}$ τοῦ z ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν C καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\eta \cdot \bar{\eta} = R^2$, λαμβάνομεν :

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\eta) \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\eta}} \cdot \frac{d\eta}{\eta} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $d\eta = R \cdot e^{i\varphi} \cdot i d\varphi \implies \frac{d\eta}{\eta} = i d\varphi$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ὁ (3) γίνεται :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\eta}} d\varphi \quad (4)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς σχέσεις (1) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\eta) \left[\frac{\eta}{\eta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\eta}} \right] d\varphi \quad \eta$$

θέτοντες $A = \frac{\eta}{\eta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\eta}}$ (5), ἡ ἀνωτέρω σχέσηις γράφεται :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \cdot A \cdot d\varphi \quad (5')$$

Η (5) γράφεται:

$A = \frac{\eta}{\eta - z} - \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \eta} = \frac{\eta - z + z}{\eta - z} + \frac{\bar{z}}{\eta - \bar{z}} = 1 + \frac{z}{\eta - z} + \frac{\bar{z}}{\eta - \bar{z}}$. Ούτως, ο A είναι προφανώς ένας πραγματικός αριθμός.

Όμοίως διά προσθέσεως των (1) και (4) λαμβάνομεν:

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \cdot (1 + Bi) d\varphi \quad (6)$$

όπου

$$Bi = \frac{z}{\eta - z} - \frac{\bar{z}}{\eta - \bar{z}} \quad (7)$$

Εν τῇς (7) προκύπτει, ότι ο Bi είναι προφανώς ένας καθαρός φανταστικός αριθμός.

Ἡ (6) γράφεται:

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) d\varphi + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \cdot Bi d\varphi \quad (8)$$

Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς (βλ. VI-4-6) ἔτιτοι:

$$f(a) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\varphi}) d\varphi$$

Διὰ $a=0$ λαμβάνομεν:

$$f(0) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) d\varphi \quad (9)$$

Οὕτως, λόγω τῆς (9), ἡ (8) γράφεται:

$$f(z) = f(0) + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\eta) \cdot Bi d\varphi \quad (10)$$

Υποθέτοντες ὅτι τὸ η εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z|=R$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$f(\eta) = u(R, \varphi) + i v(R, \varphi) \quad (11)$$

καὶ $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ (12), ὅπου $z = r \cdot e^{i\theta}$.

Προφανώς αἱ συναρτήσεις $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ εἶναι ἁρμονικαί.

Λόγω τῶν (11) καί (12) ἡ (5) γράφεται:

$$u(r, \theta) + i v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot A d\varphi + \frac{i}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} v(R, \varphi) \cdot A d\varphi \quad (13)$$

Ἐξισώνοντες τὰ πραγματιῶδη μέρη, ἐκ τῆς (13) λαμβάνομεν:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot A d\varphi \quad (14)$$

Ὀμοίως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (11) καί (12) καί ἐξισώνοντες τοὺς συντελεστὰς τῶν φανταστινῶν μερῶν τῆς σχέσεως (10) λαμβάνομεν:

$$v(r, \theta) = v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) B d\varphi \quad (15)$$

Ἐπειδὴ $A + Bi = \frac{\eta + z}{\eta - \bar{z}}$, διὰ προσθέσεως τῶν ἀντιστοιχῶν μελῶν τῶν (14) καί (15) λαμβάνομεν:

$$f(z) = i v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot \frac{\eta + z}{\eta - \bar{z}} d\varphi \quad (16) \quad \eta = R \cdot e^{i\varphi}$$

Ὁ τύπος (16) ἐμφράσει τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τὸ σημεῖον z καί μαθεῖται τύπος τοῦ Schwartz.

II. Τύπος τοῦ Poisson:

Θέτοντες $z = r \cdot e^{i\theta}$ καί $\eta = R \cdot e^{i\varphi}$, τότε δά ἔχωμεν:

$$\frac{\eta + z}{\eta - \bar{z}} = \frac{R \cdot e^{i\varphi} + r \cdot e^{i\theta}}{R \cdot e^{i\varphi} - r \cdot e^{i\theta}} = \frac{(R \cos \varphi + r \cos \theta) + i \cdot (R \sin \varphi + r \sin \theta)}{(R \cos \varphi - r \cos \theta) + i \cdot (R \sin \varphi - r \sin \theta)} \quad (17)$$

Τὸ πραγματιῶδες μέρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς σχέσεως (17) εἶναι:

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} = A \quad (18)$$

καί ὁ συντελεστὴς τοῦ φανταστινοῦ εἶναι:

$$\frac{2Rr \sin(\theta - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} = B \quad (19)$$

Ὅντω ὁ τύπος (14), λόγω τοῦ (18), γίνεται:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (20)$$

Ο τύπος (20) καλείται *όλουθρηωτικός τύπος του Poisson* διά την άρμονικὴν συνάρτησιν $u(r, \theta)$.

Ὀμοίως ὁ τύπος (15), λόγω τοῦ (19), γίνεται:

$$u(r, \theta) = u(0) + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{2Rr \eta \mu(\theta - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (21)$$

Οἱ τύποι (20) καὶ (21) παίζουν σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀρμονικῶν συναρτήσεων.

Ἡ ποσότης $A = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} = \operatorname{Re} \frac{Re^{i\varphi} + re^{i\theta}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} = \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \quad (22)$ καλεῖται

πυρήν του Poisson. Ὁ πυρήν εἶναι μηδέν διά τὰ z τῆς περιφέρειας $|z| = R$ καὶ ἀνστηρῶς θετικὸς διά τὰ z πού κεῖνται ἐντὸς αὐτῆς.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $f(z) \equiv 1$ διά $|z| \leq R$, τότε θά ἔχωμεν ὅτι $u(R, \varphi) = 1$ καὶ ὁ τύπος (20) δίδει:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi = 1 \quad (23), \quad r < R.$$

§ 2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ DIRICHLET.

Ὁρισμός XI-2-1. Ἐστω G ἓνα πεδίου τοῦ Jordan, δηλ. ἓνα πεδίου τοῦ ὁποίου τὸ σύνορον εἶναι μία κλειστὴ καμπύλη τοῦ Jordan C καὶ ἔστω $h(z)$ μία συνεχὴς πραγματικὴ συνάρτησις ὠρισμένη ἐπὶ τῆς C . Τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν μιᾶς συναρτήσεως $u(z)$, ἀρμονικῆς ἐντὸς τοῦ G καὶ τοιαύτης, ὥστε:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in G}} u(z) = h(z_0), \quad (1)$$

διά καθε $z_0 \in C$.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα εὕρισκει πλείστας ἐφαρμογὰς εἰς τὴν Μαθηματικὴν φυσικὴν (θεωρίαν Δυναμικοῦ).

Παρατήρησις: Ἐάν ἰσχύη ἡ (1), τότε θά λέγωμεν ὅτι ἡ $u(z)$ λαμβάνει τὰς συνοριαίας τῆς τιμὰς $h(z)$ ἐπὶ τῆς C .

Ἡ συνάρτησις, ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς τὴν $u(z)$ ἐντὸς τοῦ G καὶ πρὸς τὴν $h(z)$ ἐπὶ τῆς C , εἶναι αὐτομάτως συνεχὴς ἐπὶ τοῦ \bar{G} , διότι ἡ $u(z)$ εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G καὶ ὡς ἐκ τούτου καὶ συνεχὴς.

I. Τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet διὰ τὸν μοναδιαῖον δίσκον.

Θὰ ἐπιλύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ἑνὸς δίσκου μέ ἀυτῖνα τὴν μονάδα καὶ ἔχοντος τὸ κέντρον του εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Οὕτω τὸ πεδίου G εἶναι ὁ δίσκος $|z| < 1$ καὶ ἡ καμπύλη C εἶναι ἡ περιφέρεια $|z| = 1$.

Θεώρημα XI-2-1. Ἐστω ὅτι G εἶναι ὁ μοναδιαῖος δίσκος $|z| < 1$ καὶ C εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος $|z| = 1$ καὶ ἔστω ὅτι $h(z) = h(e^{i\varphi})$ εἶναι μία συνεχὴς πραγματικὴ συνάρτησις ἐπὶ τῆς C . Τότε ἡ ἁρμονικὴ συνάρτησις $u(re^{i\theta})$ ($r < 1$) ἡ δεδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου: $u(r, \theta) \equiv u(re^{i\theta}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\varphi})}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\varphi$ (2)

εἶναι ἡ μοναδικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διὰ τὸ πεδίου G , λαμβάνουσα τὰς συνοριακάς τιμὰς $h(e^{i\varphi})$ ἐπὶ τῆς περιφέρειας C .

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$u(re^{i\theta}) \longrightarrow h(e^{i\theta_0}) \quad (3) \quad \text{καθὼς τὸ } r \longrightarrow 1 \text{ καὶ } \theta \longrightarrow \theta_0$$

($0 < r < 1$ καὶ θ_0 : σταθερὸν)

Θέτομεν χάριν ἀπλότητος $h(e^{i\theta}) = h(\theta)$ καὶ λόγῳ τοῦ (2) θὰ ἔχωμεν:

$$u(e^{i\theta}) - h(\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\varphi - h(\theta) \quad (4)$$

Λόγῳ τοῦ τύπου (23) τῆς § 1, διὰ $R=1$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\varphi = 1 \cdot h(\theta) = h(\theta)$$

καὶ οὕτω ὁ (4) γράφεται:

$$u(e^{i\theta}) - h(\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\varphi) - h(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\varphi \quad (5)$$

Ἐπειδὴ ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἰς τὸν τύπον (5) εἶναι περιοδική.

περιόδου 2π , ούτος δύναται νά γραφῇ καί ὡς ἑξῆς:

$$u(e^{i\theta}) - h(\theta) = \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(\theta+a) - h(\theta)}{1+z^2-2z\cos a} da \quad (6)$$

ὅπου ἐθέσαμεν $\varphi - \theta = a$.

Ἐστω δ ἕνας ἀριθμός τοιοῦτος, ὥστε: $0 < \delta < \pi$ καί ἔστω $M = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |h(\theta)|$,
 $\omega(\delta, \theta) = \max_{|a| \leq \delta} |h(\theta+a) - h(\theta)|$ τότε θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h(\theta+a) - h(\theta)}{1+z^2-2z\cos a} da \right| &\leq \omega(\delta, \theta) \cdot \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{da}{1+z^2-2z\cos a} \\ &< \omega(\delta, \theta) \cdot \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{da}{1+z^2-2z\cos a} = \omega(\delta, \theta) \cdot \frac{1-z^2}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{1-z^2} = \omega(\delta, \theta) \quad (7) \end{aligned}$$

Λαμβάνοντες ἐν νέον ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (23) τῆς §1, διὰ $R=1$ καί τό γε-
 γονός ὅτι διὰ μίαν ὀλοκληρωτέαν συνάρτησιν $g(\theta)$ ἐπὶ τοῦ διαστήματος
 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ἰσχύει:

$$\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} g(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{-\delta} g(\theta) d\theta + \int_{\delta}^{\pi} g(\theta) d\theta, \quad 1)$$

θά ἔχωμεν διαδοχικῶς τὰς κατωθι ἀνισότητας:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{\delta \leq |a| \leq \pi} \frac{h(\theta+a) - h(\theta)}{1+z^2-2z\cos a} da \right| &\leq 2M \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{\delta \leq |a| \leq \pi} \frac{da}{1+z^2-2z\cos a} \\ &\leq 2M \frac{2(\pi-\delta)}{2\pi} \cdot \frac{1-z^2}{1+z^2-2z\cos \delta} < 2M \cdot \frac{\pi-\delta}{\pi} \cdot \frac{1-z^2}{2z-2z\cos \delta} < \frac{M}{z} \cdot \frac{1-z^2}{1-\cos \delta} \quad (8) \end{aligned}$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\begin{aligned} |u(ze^{i\theta}) - h(\theta)| &= \left| \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{h(\theta+a) - h(\theta)}{1+z^2-2z\cos a} da \right| \\ &\leq \left| \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{h(\theta+a) - h(\theta)}{1+z^2-2z\cos a} da \right| + \left| \frac{1-z^2}{2\pi} \int_{\delta \leq |a| \leq \pi} \frac{h(\theta+a) - h(\theta)}{1+z^2-2z\cos a} da \right| \end{aligned}$$

1) Καθ' ὅτι τὸ $\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} g(\theta) d\theta$ σημαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν ὀλοκληρωμάτων $\int_{-\pi}^{-\delta} g(\theta) d\theta$ καί $\int_{\delta}^{\pi} g(\theta) d\theta$.

(λόγω των (7) και (8) έχουμε:

$$\leq \omega(\delta, \theta) + \frac{M}{r} \cdot \frac{1-r^2}{1-\sin \delta} \quad (9)$$

Κατ' ακολουθίαν λόγω της (9) έχουμε:

$$\begin{aligned} |u(e^{i\theta}) - h(\theta_0)| &\leq |u(e^{i\theta}) - h(\theta)| + |h(\theta) - h(\theta_0)| \\ &\leq \omega(\delta, \theta) + \frac{M}{r} \cdot \frac{1-r^2}{1-\sin \delta} + |h(\theta) - h(\theta_0)| \end{aligned} \quad (10)$$

όπου αμφότερα τα $\omega(\delta, \theta) \rightarrow 0$ καθώς το $\delta \rightarrow 0$ και $|h(\theta) - h(\theta_0)| \rightarrow 0$ καθώς το $\theta \rightarrow \theta_0$, λόγω της συνεχείας της $h(z)$ επί της περιφέρειας C .

Ήδη αν θέσωμεν: $\delta = \sqrt{1-r^2}$, τότε το $\delta \rightarrow 0$, όταν το $r \rightarrow 1$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\frac{M}{r} \cdot \frac{1-r^2}{1-\sin \delta} = \frac{2M}{r} \cdot \sqrt{1-r^2} \left(1 + \frac{1}{12} \sqrt{1-r^2} + \dots \right) \rightarrow 0 \text{ του } r \rightarrow 1.$$

Οθεν, το δεξιόν μέλος της ανισότητας (10) τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τοῦ $r \rightarrow 1$ καὶ τοῦ $\theta \rightarrow \theta_0$. Μὲ ἄλλα λόγια, ἔαν $z = r \cdot e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}$, τότε $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} u(z) = h(\theta_0)$.

Ὡς πρὸς τὸ μονοσήμαντον, ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $u_1(x, y), u_2(x, y)$ εἶναι δύο ἁρμονικαὶ συναρτήσεις ἐντὸς τοῦ G καὶ ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$ ἐπὶ τοῦ συνόρου C τοῦ πεδίου G . Τότε ἡ συνάρτησις $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ εἶναι μηδέν ἐπὶ τῆς περιφέρειας.

Ἡ $u(x, y)$ εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G καὶ συνεχὴς ἐντὸς τοῦ \bar{G} καὶ ἐπὶ πλεόν εἶναι μηδέν ἐπὶ τοῦ συνόρου (περιφέρειας) τοῦ G . Τότε συμφώνως πρὸς τὸ Πόρισμα VI-6-1 ἡ $u(x, y)$ θὰ εἶναι μηδέν παντοῦ ἐντὸς τοῦ \bar{G} ἥτοι: $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$ διὰ πάθε $(x, y) \in G$.

II. Τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet διὰ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ($\Im m z > 0$).

Θεώρημα XI-2-2. Ἐστω G παριστᾷ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ καὶ C τὸν πραγματικὸν ἄξονα καὶ $h(z) = h(x)$ εἶναι μία συνεχὴς πραγματικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ ἄξονος C . Τότε ἡ συνάρτησις

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (11)$$

εἶναι ἡ μοναδικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διὰ τὸ πεδίου G λαμ-

βάνουσα τὰς συνοριακάς τῆς τιμᾶς $h(x)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος C .

Ἀπόδειξις: Ἀπεικονίζομεν τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ συμμόρφως ἐπὶ τοῦ ἐσωτερίου τοῦ μοναδιαίου κύκλου $|w| < 1$ εἰς τρόπον ὥστε τὸ σημεῖον $z_0 = x_0 + iy_0$ ($y_0 > 0$) νὰ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ σημεῖον $w=0$ καὶ ὁ πραγματικὸς ἄξων $-\infty < x < +\infty$ νὰ ἀπεικονίζεται ἐπὶ τῆς περιφερείας $|w|=1$. Πρὸς τοῦτοις ἀρμεῖ νὰ λάβωμεν τὸν κάτωθι μετασχηματισμόν

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (12) \quad (z = x + iy)$$

(βλέπε σχετικῶς Κεφ. V, § 4).

Ἐστω $z = \varphi(w)$ ὁ ἀντίστροφος τοῦ γραμμικοῦ κλάσματικοῦ μετασχηματισμοῦ (12). Τότε ἡ συνάρτησις $h^*(w) = h(\varphi(w))$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ κύκλου $|w|=1$, ὡς σύνθεσις συνεχῶν συναρτήσεων. Ἐστω $u^*(w)$ εἶναι ἡ μοναδικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διὰ τὸν δίσκον $|w| < 1$ καὶ τῶν συνοριακῶν τιμῶν $h^*(w)$ καὶ ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2) τοῦ θεωρήματος XI-2-1 καὶ ἔστω $u(z) = u^*(f(z))$. Τότε ἡ συνάρτησις $u(z)$ εἶναι ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ G κατὰ τὴν Πρότασιν V-6-4 καὶ λαμβάνει τὰς ἀπαιτουμένας συνοριακάς τιμὰς, ἵτοι: $h^*(f(z)) = h(x)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος C .

Σκοπὸς μας εἶναι νὰ δώσωμεν ἓναν τύπον διὰ τὴν συνάρτησιν $u(z)$. Πρὸς τοῦτοις εἰς τὸν τύπον (2) τοῦ θεωρήματος τοῦ Dirichlet, ἐφ' ὅσον θεωρήσωμεν ἀντὶ τῶν συναρτήσεων h καὶ u τὰς h^* καὶ u^* ἀντιστοίχως, τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως $u^*(w)$ διὰ $w=0$, δηλ. $z=0$ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$u^*(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^*(e^{i\varphi}) d\varphi \quad (13)$$

Τὸ σημεῖον τοῦ κύκλου $|w|=1$ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον x τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x , εἶναι τὸ σημεῖον $e^{i\varphi}$ τῆς περιφερείας πού πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν:

$$e^{i\varphi} = \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \quad (x: \text{πραγματικὸς}) \quad (14)$$

Ἐκ τῆς (14) λαμβάνομεν:

$$ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(x - \bar{z}_0)^2} dx \quad \eta$$

$$d\varphi = \frac{1}{i} \frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0} \cdot \frac{z - \bar{z}_0}{(x - \bar{z}_0)^2} dx = \frac{2y_0}{|x - z_0|^2} dx = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx \quad (15)$$

Εἰς τὴν σχέσηιν $u^*(f(z)) = u(z)$ θέτοτες $z = z_0$ λαμβάνομεν: $u^*(f(z_0)) = u(z_0)$ ἢ $u(z_0) = u^*(0)$. Ἀντιυαδιστώντες εἰς τὴν (13) τὸ ἀφ. διδόμενον ὑπὸ τῆς (15) καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $h^*(e^{i\varphi}) = h^*(w) = h(x)$, λαμβάνομεν.

$$u(z_0) = \frac{y_0}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx$$

καὶ γενικῶς: θεωροῦντες τὸ σημεῖον $z = x + iy$ ($y > 0$) τοῦ μιγαδικοῦ ἡμιεπιπέδου $\Im m z > 0$ ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται ὡς ἀμολούδως, ἐφ' ὅσον τὴν μεταβλητὴν x τοῦ ἀνωτέρω τύπου τὴν συμβολίσωμεν π.χ. μὲ τὸ σύμβολον t .

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{(t - x)^2 + y^2} dt$$

Τὸ θεώρημα ὁδὲν ἀπεδείχθη πλήρως.

Παρατηρήσεις: 12/. Πολλὰς φορές τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet διὰ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ($\Im m z > 0$) διατυποῦται ὡς ἀμολούδως:

Νά λυθῇ τὸ πρόβλημα τῶν συνριαυῶν τιμῶν.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0$$

καὶ $\lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y) = h(x)$, ὅπου ἡ $f(x)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ $-\infty < x < +\infty$.

Ἡ λύσις αὐτοῦ θά γίνη ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τύπων τοῦ Dirichlet.

23/. Συχνά δὲ τὸ πρόβλημα τῶν συνριαυῶν τιμῶν διὰ ἕναν κύκλον αὐτί-
νος R ἐμφανίζεται καὶ ὑπὸ τὴν κατωθι μορφήν:

Νά λυθῇ ἡ διαφορικὴ εἰσώσις τοῦ Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{διὰ } r < R$$

$$\text{καὶ } u(R, \theta) = h(\theta).$$

Ἐάν $R = 1$, ἡ συνθήκη τῶν συνριαυῶν τιμῶν γράφεται $u(1, \theta) = h(\theta)$.

Εφαρμογαί 13/. Νά εύρεθῇ μία ἄρμονιυή συνάρτησις ἐπὶ τοῦ ἄνω ἡμικυκλίου τοῦ z ($\Im m z > 0$) καὶ ἡ ὁποία λαμβάνει τὰς ὠρισμένες τιμὰς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὰς δεδομένες ὑπὸ τοῦ τύπου $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ἐὰν } x > 0 \\ 0, & \text{,, } x < 0 \end{cases}$

Λύσις: Ἡ δοτούμένη συνάρτησις παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου (11) τοῦ θεωρήματος XI-2-2, ἥτοι:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{(t-x)^2 + y^2} \cdot dt = \frac{y}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^0 \frac{0 \cdot dt}{(t-x)^2 + y^2} + \frac{y}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} =$$

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{t-x}{y} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right).$$

23/. Νά εύρεθῇ μία ἄρμονιυή συνάρτησις ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z|=1$ καὶ λαμβάνουσα τὰς καθωρισμένες τιμὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τὰς δεδομένες ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $h(e^{i\varphi}) = \begin{cases} 1, & \text{ἐὰν } 0 < \varphi < \pi \\ 0, & \text{,, } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$

Λύσις Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (2) τοῦ θεωρήματος XI-2-1 δά ἔχωμεν:

$$u(r, \theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\varphi})}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} d\varphi$$

$$= \frac{1-r^2}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2} \right).$$

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

- Δείξατε ὅτι: α) Ἡ συνάρτησις $u(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2} \right)$, $0 < r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ εἶναι ἄρμονιυή ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z|=1$.

$$\beta) \quad \lim_{r \rightarrow 1-} u(r, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{ἐὰν } 0 < \theta < \pi \\ -1, & \text{ἐὰν } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

- Νά εύρεθῇ μία συνάρτησις $u(x, y)$, ἡ ὁποία εἶναι ἄρμονιυή εἰς τὸ ἄνω ἡμικύκλιον $\Im m z > 0$ καὶ ἡ ὁποία λαμβάνει τὰς τιμὰς ἐπὶ τοῦ

ἄξονος τῶν x τὰς δεδομένας ὑπὸ τοῦ τύπου, $h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ἐὰν } x < 0 \\ 1 & \text{ἐὰν } x > 0 \end{cases}$
(πρόβλημα τοῦ Dirichlet).

(Ἀπάντι: $u(x, y) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \text{τοξ εφ}\left(\frac{y}{x}\right)$).

3. Ὀμοίως, ὡς ἄνωτέρω, διὰ τὴν συνάρτησιν :

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{ἐὰν } x < -1 \\ 0, & \text{ἐὰν } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{ἐὰν } x > 1 \end{cases}$$

(Ἀπάντι: $u(x, y) = 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \text{τοξ εφ}\left(\frac{y}{x+1}\right) - \frac{1}{\pi} \cdot \text{τοξ εφ}\left(\frac{y}{x-1}\right)$).

4. Νὰ εὑρεθῇ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τοῦ Dirichlet διὰ τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ καὶ συνοριακὰς τιμὰς $U(t)$, ὅπου ἡ συνεχὴς συνάρτησις $U(t)$ μηδενίζεται ἐντὸς τοῦ διαστήματος $[a, \beta]$.

5. Νὰ λυθῇ τὸ κατωτέρω πρόβλημα τῶν συνοριακῶν τιμῶν:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0 \quad (\text{Διαφορικὴ ἐξίσωσις τοῦ Laplace})$$

$$\text{καὶ } \lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = h(x) = \begin{cases} a_0 & \text{ἐὰν } x < -1 \\ a_1 & \text{" } -1 < x < +1 \\ a_2 & \text{" } x > 1, \end{cases}$$

ὅπου a_0, a_1, a_2 εἶναι σταθεραὶ

(ὑπόδ: βλ. παρατήρησιν § 2)

6. Ἐστω $f(z)$ εἶναι μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον $\Im m z > 0$ καὶ ἔστω $\eta = \xi + i\eta$ ἓνα σημεῖον αὐτοῦ τοῦ ἡμιεπιπέδου. Δείξατε ὅτι:

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot f(x)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} \cdot dx$$

Θέτοντες $f(\eta) = u(\xi, \eta) + i v(\xi, \eta)$ δείξατε, ὅτι ὁ ἄνωτέρω τύπος ἰσοδυναμεῖ μέ τοὺς κατωτέρω:

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot u(x, 0)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} \cdot dx \\ v(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot v(x, 0)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} \cdot dx \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(Τύποι τοῦ Poisson διὰ τὸ ἄνω} \\ \text{ἡμιεπίπεδον } \Im m z > 0) \end{array}$$

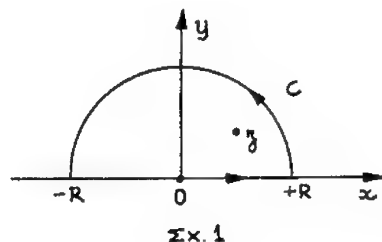
Ἀπόδειξις: Ἐστω C τὸ σύνορον τοῦ ἡμικυκλίου αὐτοῦ R (βλ. Σχ. 1)

καὶ η ἓνα ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐπει-

δὴ ἡ C ἐγκυλίνει τὸ η δὲν δὲ ἐγκυλίνει τὸ $\bar{\eta}$

καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲ ἔχουμεν:

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\eta} dz, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\bar{\eta}} dz$$



Διὰ προσθέσεων τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων λαμ-

βάνομεν:

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left\{ \frac{1}{z-\eta} - \frac{1}{z-\bar{\eta}} \right\} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(\eta - \bar{\eta}) f(z) dz}{(z-\eta) \cdot (z-\bar{\eta})}$$

Εἶναι $\eta = \xi + i\eta$, $\bar{\eta} = \xi - i\eta$ καὶ ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται:

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-R}^R \frac{\eta \cdot f(x) dx}{(x-\xi)^2 + \eta^2} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\eta \cdot f(z) dz}{(z-\eta) \cdot (z-\bar{\eta})}$$

ὅπου Γ εἶναι τὸ ἡμικύκλιον τῆς καμπύλης C .

Ἀποδέτοντες ὅτι $R \rightarrow \infty$ τὸ δευτερον ὁλοκληρώμα τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος τείνει πρὸς τὸ μηδέν καὶ ὡς ἐκ τούτου λαμβάνομεν:

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \cdot f(x) dx}{(x-\xi)^2 + \eta^2}$$

7. Νὰ εὐρεθῇ ἡ συνάρτησις $u(r, \theta)$ ἁρμονικὴ ἐντὸς τοῦ κύκλου $K(0,1)$, συνεχῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ καὶ τοιαύτη, ὥστε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου νὰ λαμβάνει τὰς τιμὰς $h(e^{i\varphi}) = \sin^2 \varphi$.

8. Ἐὰν θέσωμεν $\eta = R \cdot e^{i\varphi}$, $z = r \cdot e^{i\theta}$, τότε ὡς γνωστὸν δὲ ἔχουμεν:

$$\frac{\eta+z}{\eta-z} = \frac{(R^2-r^2) + 2iRr\sin(\theta-\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi) + r^2}$$

Τότε διὰ χρησιμοποίησεως αὐτῆς τῆς ἰσότητος δείξατε ὅτι:

$$i) \quad u(r, \theta) = u(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$$ii) \quad v(r, \theta) = v(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta)$$

$$iii) \quad f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad f(0) = u(0) + i v(0)$$

όπου:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

9. Επιλύσατε τó πρόβλημα του Dirichlet διά τó εξωτερικόν του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$. Δείξατε ότι, ή τιμή της λύσεως εις τó άπειρον ισούται πρός τήν μέσην τιμήν των συνοριακών τιμών επί του κύκλου.

10. Δείξατε τήν κάτωδι εναλλακτικήν ισοδυναμία του τύπου του Schwartz (16) της §1, ήτοι:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\eta-z_0|=R} \frac{u(\eta)}{\eta-z} dz - \overline{f(z_0)}$$

Απολούθως διά χρησιμοποίησεως του άνωτέρω τύπου διά τόν δίσκον $G: |z| < 1$ και τήν περιφέρεια $C: |z|=1$, εύρατε τήν μοναδικήν συνάρτησιν $u(z)$ άρμονικήν εντός του G τιαύτην, ώστε:

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi_0}} \frac{\partial u(z)}{\partial \tau} = h(e^{i\varphi_0}) \quad (0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi),$$

όπου $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ είναι ή αυτινική παράγωγος της u και $h(z)$ είναι δοθεῖσα συνάρτησις συνεχής επί της περιφέρειας C .

(πρόβλημα του Neumann διά τó χωρίον G)

11. Νά εύρεθῇ ή συνάρτησις u άρμονική και φραγμένη εντός του $C \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$, ή όποία ισούται πρός $-h$ επί του $(-\infty, -1]$ και ισούται πρός h επί του $[1, +\infty)$.

(Υπόδ: θεωρήσατε την άπειρόνισιν $z = \frac{1}{2} (w + w^{-1})$, όπου $\Im m w > 0$. υ.τ.λ.
Είναι $u(z) = 2h \left[\frac{1}{2} - \pi^{-1} \arctan (z + \sqrt{z^2 - 1}) \right]$, $\Im m (z + \sqrt{z^2 - 1}) > 0$

12. Νά λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦ Dirichlet $\nabla^2 u = 0$ διὰ τὸ χωρίον
 $G = \{ z : |z| \leq 1, \Im m z \geq 0 \}$ εἰς τρόπον, ὥστε $u(x, y) = 0$, ὅταν $y = 0$, καὶ
 $-1 < x < 1$ καὶ $u(x, y) = 1$, ὅταν $x^2 + y^2 = 1$.
13. Νά εὐρεθῇ μία συνάρτησις $\phi(x, y)$ ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονικὴ εἰς τὸ πρῶτον τέταρ-
τον $x > 0, y > 0$ καὶ ἡ ὁποία ἐκανοποιεῖ τὰς συνοριακὰς συνθήκας $\phi(x, 0) = e^{-x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$.
14. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ U εἶναι μία πραγματικὴ συνάρτησις τοῦ $t \in (-\infty, +\infty)$ τοιαύτη ὥστε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|U(t)|}{1+|t|} dt < +\infty$$

Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt$$

εἶναι ἁρμονικὴ εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον καὶ $\lim_{z \rightarrow t_0} u(z) = U(t_0)$ διὰ πᾶθε σημεῖον
συνεχείας t_0 τῆς U .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΝ ΦΥΣΙΚΗΝ

§1. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΡΟΗΝ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

I. Θεωρούμεν τήν κίνησιν ενός άσυμπίεστου ρευστοῦ (δηλ. ενός ὑγροῦ ἢ ενός αἰρίου) διά μέσου ὁδοῦντος χωρίου. Ὑπὸ τὸν ὅρον πεδίου ταχυτήτων ἢ ροῆς ἐννοοῦμεν μίαν διανυσματικὴν συνάρτησιν δίδουσα τὴν ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ὁδοῦντος χωρίου εἰς κάθε χρονικὴν στιγμὴν. Μία ροὴ δὲ καλεῖται σταθερὴ, ἐάν αὐτὴ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Μία ροὴ δὲ λέγωμεν, ὅτι εἶναι παράλληλος πρὸς ἓνα σταθερὸν ἐπίπεδον Π , ἐάν τὴ διεύθυνσιν τοῦ πεδίου ταχυτήτων εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χωρίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π ἢ ἰσοδυνάμως ἐάν τὴ ροὴ (δηλ. τὴ διανυσματικὴν συνάρτησιν) δὲν ἔχει συνιστώσας καθέτους πρὸς τὸ Π .

Προφανῶς δὲν βλάπτεται τὴ γενικιότητα τοῦ θέματος, ἐάν θεωρήσωμεν ὡς ἐπίπεδον Π τὸ ἐπίπεδον oxy δηλ. τὸ z -ἐπίπεδον.

Οὕτω μία σταθερὴ παράλληλος ροὴ χαρακτηρίζεται ὑπὸ μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x, y ἢ ἰσοδυνάμως ὑπὸ μιᾶς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως:

$$W(z) = U(x, y) + i V(x, y) \quad (1)$$

ὅπου $U(x, y)$ εἶναι τὴ x -συνιστώσα τῆς ροῆς καὶ $V(x, y)$ εἶναι τὴ y -συνιστώσα αὐτῆς, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς παριστάνουσα τὴν ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ στὸ σημεῖο (x, y) . Εἰς τὰ ἑπόμενα δὲ θεωροῦμεν πάσας τὰς ροὰς σταθερὰς καὶ παράλληλους πρὸς τὸ z -ἐπίπεδον.

Σχήματα κατασκευασθέντα εἰς τὸ z -ἐπίπεδον ἐρμηνεύονται ὡς ἀπεικονίζοντα ἀντιστοιχοὺς κυλινδρικοὺς μὲ ἄξονας καθετοὺς εἰς αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον¹⁾.

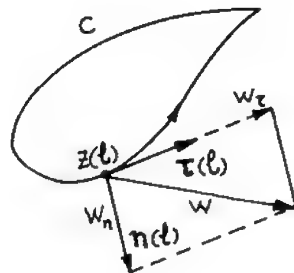
Ὑπάρχει πάντοτε μία πραγματικὴ συνάρτησις $\Phi(x, y)$ καλουμένη δυναμιὸν ταχύτητας τοιαύτη, ὥστε:

$$U(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

II. Ἐστω ἡ ροὴ $W(z) = U(x, y) + i V(x, y)$ ὠρισμένη εἰς ἓνα πεδίου G τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔστω ὅτι C εἶναι μία κλειστὴ λεία καμπύλη τοῦ Jordan μήτους ℓ περιεχομένη ἐντὸς τοῦ G (βλ. Σχ. 1) τῆς ὁποίας τὴ ἐξίσωσις εἶναι:

1) π.χ. Ὁ κύκλος εἰς τὸ z -ἐπίπεδον παριστᾷ ἓνα ἀπείρου μήτους κυλινδρικοῦ ἀντικείμενον περὶ τὸ ὁποῖον λαμβάνει χώρα ἡ ροὴ.

ή $z = z(\ell) = x(\ell) + i y(\ell)$, ($0 \leq \ell \leq t$) και ἔστω $\tau(\ell)$ τὸ μοναδιαῖον ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα τῆς C ἔχον φορὰν τὴν ἰδίαν πρὸς αὐτὴν ποὺ αὐξάνει τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἀπὸ ἑνα σταθερὸν σημεῖον μὲ ἓναν ὠρισμένον προσανατολισμόν. Ἐστω $\eta(\ell)$ τὸ μοναδιαῖον (ἐξωτερικόν) κάθετον διάνυσμα τῆς C εἰς τὸ σημεῖον $z(\ell)$. Τότε τὸ $\tau(\ell)$ ἔχει συνιστώσας $\frac{dx}{d\ell}$, $\frac{dy}{d\ell}$, οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωμεν:



Σχ. 1

$$\tau(\ell) = z'(\ell) = \frac{dx}{d\ell} + i \frac{dy}{d\ell} \quad (3), \quad \text{ὅπου } |\tau(\ell)| = 1$$

Εἶναι δὲ καὶ

$$\eta(\ell) = \frac{1}{i} z'(\ell) = \frac{dy}{d\ell} - i \frac{dx}{d\ell} \quad (4)$$

Ἀναλύομεν τὴν ροὴν $W = U(x, y) + i V(x, y)$ εἰς δύο συνιστώσας κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐφαπτομενιοῦ καὶ κάθετου διανύσματος τῆς C εἰς τὸ σημεῖον $z(\ell)$, παριστώντες τὰς συνιστώσας ταύτας διὰ τῶν W_τ, W_η ἀντιστοίχως (βλ. Σχ. 1). Οὕτω δὲ ἔχωμεν:

$$W = W_\tau \cdot \tau + W_\eta \cdot \eta \quad (5)$$

Πολλπλασιασάδοντες ἑσωτερικῶς ἐπὶ τ τὴν (5) λαμβάνομεν:

$$W_\tau = W \cdot \tau \quad (6) \quad \eta$$

ἐπειδὴ $W = (U, V)$ καὶ $\tau = \left(\frac{dx}{d\ell}, \frac{dy}{d\ell} \right)$, ἡ (6) δίδει:

$$W_\tau = U \cdot \frac{dx}{d\ell} + V \cdot \frac{dy}{d\ell} \quad (7)$$

Ἀναλόγως εὐρίσκουμεν:

$$W_\eta = U \frac{dy}{d\ell} - V \frac{dx}{d\ell} \quad (8)$$

III. Ἡδὴ ἂς ὑποθέσωμεν τὴν ὕπαρξιν καὶ τὴν συνέχειαν τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων $U(x, y)$, $V(x, y)$ εἰς καθεὶν σημεῖον τοῦ χωρίου R , τὸ ὁποῖον περιυφίεται ὑπὸ τῆς καμπύλης C .

ὑπὸ τὸν ὅρον κυκλοφορίαν τοῦ ρευστοῦ περὶ τῆς C καλοῦμεν τὸ κατωθι ὁλοκλήρωμα:

$$\oint_C W_z dl = \oint_C \left(U \frac{dx}{dl} + V \frac{dy}{dl} \right) dl = \oint_C U dx + V dy \quad (9)$$

Υπό τόν ὅρον ροήν τοῦ ρευστοῦ διά μέσου τῆς C καλοῦμεν τό κατωθεύ
ὁλομήρωμα :

$$\oint_C W_n dl = \oint_C \left(U \frac{dy}{dl} - V \frac{dx}{dl} \right) dl = \oint_C U dy - V dx \quad (10)$$

Ἐάν τό ὁλομήρωμα (9) γίνεταί μηδέν διά καθε καμπύλην C τοῦ ἀνωτέρω
τόπου, τότε τό πεδίου θά καλεῖται ἀστροφύλον ἢ ἐλευθέρον κυκλοφορίας ἐν-
τός τοῦ G .

Ἐπειδή $\oint_C \bar{W} dz = \oint_C \overline{(U + iV)} (dx + i dy) = \oint_C U dx + V dy + i \oint_C U dy - V dx$

αἱ (9) καί (10) γράφονται ἀντιστοιχῶς ὡς ἀπολούθως:

$$\oint_C U dx + V dy = \operatorname{Re} \oint_C \bar{W} dz \quad (9')$$

$$\oint_C U dy - V dx = \operatorname{Im} \oint_C \bar{W} dz \quad (10')$$

Οἱ (9') καί (10') δίδουν ἀντιστοιχῶς τήν κυκλοφορίαν πέριξ τῆς C καί
τήν ροήν διά μέσου τῆς C . Ἐάν ἡ (10) μηδενίζεται διά καθε καμπύλην C
τοῦ ἀνωτέρω τόπου, τότε τό πεδίου θά καλεῖται σωληνοειδές ἐντός τοῦ G .

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ Green διά τό ἐπικαμπύλιον ὁλομήρωμα (10)
λαμβάνομεν:

$$\oint_C U dy - V dx = \iint_R \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right] dx dy, \quad (11)$$

ὅπου R εἶναι ἓνα ὑψιστόν χωρίον μέ σύνορον τήν C .

Τέλος, ἐάν τό πεδίου εἶναι σωληνοειδές, τό διπλοῦν ὁλομήρωμα τῆς (11)
θά εἶναι μηδέν καί ἵνα συμβαίη αὐτό, ἀρκεῖ νά ἰσχύη:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

Ἡ ἐξίσωσις (12) καλεῖται ἐξίσωσις τῆς συνεχείας.

IV. Έν τῶν σχέσεων (2) καί (12) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

Έν τῆς (13) ἔπεται, ὅτι ἡ συνάρτησις $\phi(x, y)$ εἶναι ἁρμονική καί ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἡ συζυγῆς ἁρμονική αὐτῆς, ἥτοι ἡ $\psi(x, y)$.

Ἐστω
$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad (14)$$

Ἡ $\Omega(z)$ εἶναι προφανῶς μία ἀναλυτικὴ συνάρτησις. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = U - iV \quad (15)$$

(Συνθῆναι τῶν Cauchy-Riemann)

Ὅθεν, ἡ ταχύτης, λόγῳ τῆς (15) θά εἶναι:

$$W(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \overline{U - iV} = \overline{\Omega'(z)} \quad (16)$$

Ἐχει δέ αὕτη μέτρον v τό κατωθί:

$$|v| = \sqrt{U^2 + V^2} = |\overline{\Omega'(z)}| = |\Omega'(z)| \quad (17)$$

Τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ταχύτης εἶναι μηδέν καλοῦνται στατικά σημεῖα.

Ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$ εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῆς ροῆς καί καλεῖται μικροδυνάμιον δυναμιόν.

Ἐχομεν λοιπόν:

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις ϕ, ψ πληροῦν τὰς συνθῆκας τῶν Cauchy-Riemann, ἥτοι:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Εἶναι δέ,
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -\frac{\partial \phi}{\partial y} dx + \frac{\partial \phi}{\partial x} dy.$$

Ὅθεν,
$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial \phi(\tau, t)}{\partial y} d\tau + \frac{\partial \phi(\tau, t)}{\partial x} dt \quad (18)$$

Ὁ τύπος (18) μᾶς δίδει τὴν ἁρμονικὴν συζυγῆν τῆς $\phi(x, y)$.

Τὰ σημεῖα z διὰ τὰ ὁποῖα $\Omega'(z) = 0$ καλοῦνται σημεῖα ἀκινησίας τῆς ροῆς.

V. 'Εάν θεωρήσωμεν τὰς μονοπαραμετρινὰς οἰογενεῖας τῶν γραμμῶν

$$\phi(x,y)=a, \quad \psi(x,y)=b \quad (19)$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις ϕ, ψ εἶναι ἁρμονικαὶ συνδυγεῖς καὶ a, b παράμετροι, τότε αἱ δύο οἰογενεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι μεταξύ των δηλ. ὑάδε γραμμή τῆς μιᾶς οἰογενεῖας τέμνει ὀρθογωνίως πάσας τὰς γραμμὰς τῆς ἄλλης οἰογενεῖας.

Πράγματι, διαφορίζοντες τὴν $\phi(x,y)=a$ ὡς πρὸς x λαμβάνομεν $\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ καὶ ἡ ὑλίστις τῆς $\phi(x,y)=a$ εἰς τὸ σημεῖον (x,y) εἶναι $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y}$. Ὀμοίως ἡ ὑλίστις τῆς $\psi(x,y)=b$ εἰς τὸ (x,y) εἶναι $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \psi / \partial x}{\partial \psi / \partial y}$.

Ὅθεν, τὸ γινόμενον τῶν ὑλίσεων, διὰ χρησιμοποίησεως τῶν συνθηκῶν τῶν Cauchy-Riemann, εἶναι :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} / \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} / \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = -1 \quad (20)$$

Οὕτω αἱ θεωρηθεῖσαι δύο καμπύλαι τῶν οἰογενειῶν τέμνονται ὀρθογωνίως.

Αἱ καμπύλαι τῆς οἰογενεῖας $\phi(x,y)=a$ καλοῦνται ισοδυναμικαὶ γραμμαί, ἐνῶ αἱ καμπύλαι τῆς οἰογενεῖας $\psi(x,y)=b$ καλοῦνται ρευματικαὶ γραμμαί.

Ἡ δὲ συνάρτησις $\psi(x,y)$ καλεῖται συνάρτησις ρεύματος.

Συμφώνως πρὸς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν (19) διὰ τὰς ἰσοδυναμικὰς γραμμὰς ἔχωμεν τὴν διαφ. ἐξίσωσιν :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = U(x,y) dx + V(x,y) dy = 0 \quad (21)$$

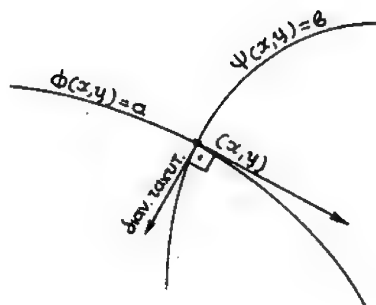
Ὀμοίως, λόγῳ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων (19), αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ δὲ πληροῦν τὴν ὑάτωδι διαφ. ἐξίσωσιν :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -V(x,y) dx + U(x,y) dy = 0 \quad (22)$$

Εἰς ὑάδε σημεῖον (x,y) τῆς ροῆς (εὐτὸς ἀπὸ τὰ στατιῶδὰ σημεῖα) ἡ ταχύτης εἶναι ὑάδετος πρὸς τὴν ἰσοδυναμικὴν γραμμὴν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ (x,y) καὶ ἑφαπτομενικὴ πρὸς τὴν ρευματικὴν γραμμὴν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ (x,y) .

Πράγματι, ἔστω $\phi(x,y)=a$ (βλ. Σχ.1) ἡ ἰσοδυναμικὴ ἢ διερχομένη διὰ

τοῦ σημείου (x, y) . Τό ἐφαπτομενιὺν διάνυσμα ταύτης εἰς τό (x, y) θά ἔχη κλίσιν τήν $y' = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}}$, τό δέ διάνυσμα τῆς ταχύτητος εἰς τό (x, y) θά ἔχη κλίσιν τήν $\frac{V}{U} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial x}}$. Τό



Σχ. 1

δέ γινόμενον τῶν συντελεστῶν ματευθύνσεως τῶν δύο διανυσμάτων εἶναι -1 . Ὅθεν, ταῦτα τέμνονται καθέτως. Διά χρησιμοποίησης τῶν συνθηκῶν τῶν Cauchy-Riemann ἀποδεικνύομεν καί τή δεύτερη ιδιότητα.

VI. Εἰς τήν ἀναπτυχθεῖσαν ἀνωτέρω θεωρίαν ὑποθέσαμεν, ὅτι δέν ὑπάρχουν σημεία τοῦ z -ἐπιπέδου εἰς τὰ ὁποῖα ἐμφανίζεται ἡ ἐξαφανίζεται ὑγρὸν. Τοιαῦτα σημεία καλοῦνται *πηγαί* ἢ *φρέατα* ἀντιστοίχως.

Εἰς τοιαῦτα σημεία, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰδιάζοντα σημεία, τό ἐπιυαμπύλιον ὁλοκληρώμα (10) εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός διὰ τὰδε κλειστήν καμπύλην C , ἡ ὁποία ἐγκυλῆει τοιαῦτα σημεία. Ἐάν $2\pi q dt$ εἶναι ἡ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις ἐν τῇς πηγῆς ἢ τοῦ φρέατος τῆς μάθης τοῦ ὑγροῦ εἰς χρόνον dt , ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἐπιυαμπυλίου ὁλοκληρώματος (10) θά ἰσοῦται πρὸς $2\pi q$.

Ἐπὶ πλεόν εἰς τοιαῦτα σημεία δέν ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις τῆς συνεχείας (18) καί κατ' ἀπολοιδίαν δέν ἰσχύει καί ἡ ἐξίσωσις τοῦ Laplace (13).

Παραδείγματα: 1^{ον}. Ἡ γραμμικὴ συνάρτησις:

$$\Omega(z) = C \cdot z, \quad (z = x + iy)$$

δύναται νά θεωρηθῇ ὡς τό μιγαδικὸν δυναμιὺν τῆς ροῆς καταλαμβάνουσα ὁλόκληρον τό μιγαδικὸν ἐπίπεδον. Λόγω δέ τῆς σχέσεως (16) ἡ ταχύτης θά εἶναι:

$$W(z) = \overline{\Omega'(z)} = \overline{C}, \quad \text{εἰς τὰδε σημείον τοῦ ἐπιπέδου.}$$

Ἡτοι ἡ ταχύτης εἶναι σταθερά παντοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Θέτοντες $C = \alpha + i\beta$ (ὅπου α, β πραγματικοί ἀριθμοί) τό μέτρον τῆς σταθερᾶς ταχύτητος εἶναι $|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (14) έχουμε:

$$\Phi(x,y) + i\Psi(x,y) = (a+ib)(x+iy) \quad \text{ή} \quad \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) = (ax-by) + i(bx+ay).$$

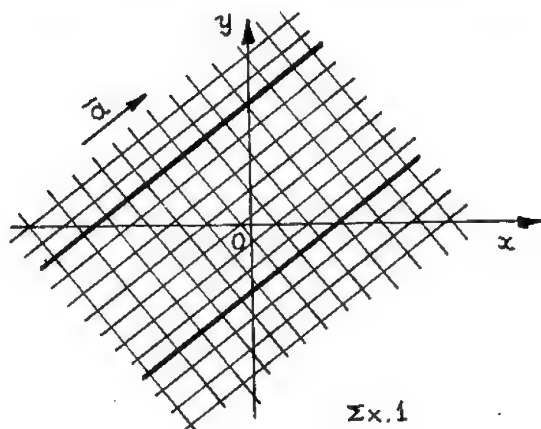
Όθεν, το δυναμικόν της ταχύτητας υαδώς και η συνάρτησις ρεύματος δά είναι αντίστοιχως $\Phi(x,y) = ax-by$, $\Psi(x,y) = bx+ay$.

Αί δέ ισοδυναμιαί γραμμαί υαδώς και αί ρευματιαί γραμμαί δά είναι αντίστοιχως, (βλ.

Σχ.1), $ax-by=c_1$, και $bx+ay=c_2$

όπου c_1, c_2 σταθεραί.

Όπως φαίνεται και έυ του σχήματος τά δύο συστήματα τών γραμμών είναι εύθειαι και τέμνονται υαδέτως. Η αὐτή συνάρτησις $\Omega(z) = cz$ δύναται νά θεωρηθῇ ως τό μιγαδικόν δυναμικόν διά μίαν όμοιόμορφον ροήν έντός μιᾶς θωρίδος τῆς όποίας τό σύνορον συνίσταται έυ δύο εύθειων παραλλήλων πρὸς τό διάνυσμα \vec{a} .



Σχ.1

2^ο/ Η συνάρτησις $\Omega(z) = z^2$ δύναται νά θεωρηθῇ ως τό μιγαδικόν δυναμικόν τῆς ροῆς υαταλαμβάνουσα όλόκληρον τό μιγαδικόν επίπεδον. Είναι δέ $W(z) = \overline{\Omega'(z)} = 2\bar{z}$.

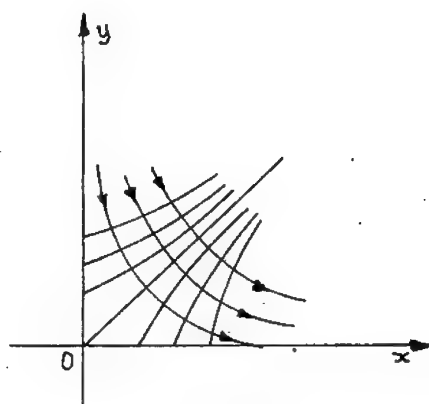
Είναι δέ, $\Phi(x,y) + i\Psi(x,y) = (x+iy)^2 (z=x+iy)$ ή

$$\Phi(x,y) + i\Psi(x,y) = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$$

Όθεν, τό δυναμικόν τῆς ταχύτητας υαδώς και η συνάρτησις ρεύματος δά είναι αντίστοιχως:

$$\Phi(x,y) = x^2 - y^2, \quad \Psi(x,y) = 2xy.$$

και τό αντίστοιχον σύστημα τών ισοδυναμιών και τών ρευματιων γραμμών είναι:



Σχ.2

$x^2 - y^2 = C_1$, $2xy = C_2$ (C_1, C_2 : σταθεραί). Ήτοι τό σύστημα συνίσταται ἐν δύο οἰσγενειῶν ἰσοσυνελῶν ὑπερβολῶν τεμνομένων καθεύτως. Ἡ ἰδίᾳ συνάρτησις παρίστα τό μιγαδικόν δυναμικόν τῆς ροῆς τῆς λαμβανούσης χώραν εἰς τό πρῶτον τέταρτον τοῦ ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 2) δι' αὐτήν τήν περίπτωσιν.

35%. Ἐστω ὅτι τό μιγαδικόν δυναμικόν εἶναι τῆς μορφῆς: $\Omega(z) = a \cdot \log z$, (1) ὅπου ὡς λογαριθμόν λαμβάνομεν τήν πρωτεύουσαν τιμήν καί ὁ a εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός. θεωροῦντες τήν ἐυδεικτικήν μορφήν τοῦ z ἥτοι τήν $z = r \cdot e^{i\varphi}$, δά ἔχωμεν $\log z = \log r + i \cdot \varphi$. Οὕτω $\Omega(z) = a \log r + i \cdot a \cdot \varphi$. Συνεπῶς τό δυναμικόν τῆς ταχύτητος καθεύτως καί ἡ συνάρτησις ρεύματος δά εἶναι ἀντιστοίχως.

$$\Phi(x, y) = a \cdot \log r, \quad \Psi(x, y) = a \cdot \varphi \quad (2)$$

Αἱ δέ ἰσοδυναμικαί γραμμαί καθεύτως καί αἱ ρευματικαί γραμμαί δά εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\log r = \frac{C_1}{a}, \quad \varphi = \frac{C_2}{a} \quad (3) \quad (C_1, C_2 \text{ σταθεραί})$$

ἥτοι ὁμοκέντροι κύκλοι καί εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς ἀντιστοίχως.

Τό δέ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι:

$$|v| = |\overline{\Omega'(z)}| = \left| -\frac{a}{z} \right| = \frac{|a|}{r} \quad (4)$$

καί τό διάνυσμα τῆς ταχύτητος ἔχει τήν διεύθυνσιν τῆς αὐτίνος $\varphi = \text{σταθ.}$

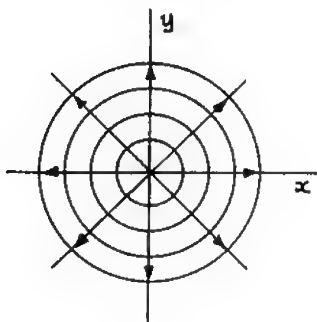
Ἐν τῆς σχέσεως (4) παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τήν ἀρχήν τό μέτρον τῆς ταχύτητος καθεύτως ἀπείρον. Οὕτω τό σημεῖον $z=0$ εἶναι ἕνα ἰδιάζον σημεῖον τῆς συναρτήσεως $\Omega(z)$ πού δίδει τό μιγαδικόν δυναμικόν.

Οὕτω, ἐάν $a > 0$, ἔχομεν εἰς τό σημεῖον $z=0$ πηγὴν (ἢ ἄλλως θεωρήν πηγὴν) καί ἡ ταχύτης διευθύνεται ἀπό τήν ἀρχήν πρὸς τὰ ἔξω (βλ. Σχ. 3α), ἐνῶ, ἐάν $a < 0$, ἔχομεν εἰς τό σημεῖον $z=0$ φρέαρ (ἢ ἄλλως ἀρνητικὴν πηγὴν) καί ἡ ταχύτης διευθύνεται ἐν τῶν ἔξω πρὸς τήν ἀρχήν. Τὰ κατωθι σχήματα δεικνύουν ἐπίσης τὰς ἰσοδυναμικὰς καί ρευματικὰς γραμμάς.

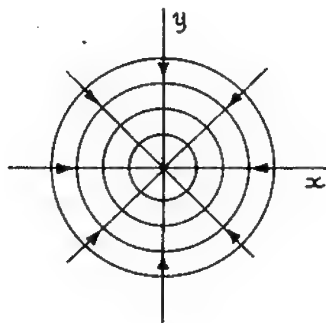
Ἡ κυκλοφορία περὶ μιᾶς κλειστῆς καμπύλης C , βάσει τῶν τύπων (3) καί (16), δά εἶναι:

$$\oint_C U dx + V dy = \operatorname{Re} \oint_C \bar{W} dz = \operatorname{Re} \oint_C \Omega'(z) dz =$$

$$= \operatorname{Re} \oint_C (a \log z)' dz = \operatorname{Re} \cdot a \cdot \oint_C \frac{dz}{z} = \operatorname{Re} \cdot a \cdot 2\pi i = 0$$



Σχ. 3α



Σχ. 3β

Ἡ δὲ ροὴ διὰ μέσου τῆς C , βάσει τῶν τύπων (10') καὶ (16), δά εἶναι:

$$\oint_C U dy - V dx = \gamma m \oint_C \bar{W} dz = \gamma m \oint_C (a \log z)' dz = \gamma m a \cdot \oint_C \frac{dz}{z} = \gamma m a \cdot 2\pi i = 2\pi a.$$

§2. Η ΡΟΗ ΠΕΡΙΞ ΕΝΟΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ - ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BLASIUS

Ι. Θεωροῦμεν ἓνα ρευστόν τὸ ὁποῖον υἱνεῖται ἀρχικῶς μέ μιαν σταθεράν ταχύτητα V_0 . Ἀπολοῦδως τοποθετοῦμεν υαθέτως πρὸς τὸ σταθερὸν ἐπίπεδον πρὸς τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ἡ υἱνησις τοῦ ρευστοῦ ἓνα ἀντικείμενον. Τὸ πρόβλημά μας εἶναι νὰ μελετήσωμεν τὴν υἱνησιν τοῦ ρευστοῦ μετὰ τὴν τοποθέτησιν αὐτοῦ τοῦ ἀντικειμένου.

Μία γενικὴ ἀρχὴ περιλαμβάνουσα αὐτὸν τὸν τύπον τοῦ προβλήματος εἶναι νὰ παραστήσωμεν τὸ μιγαδικὸν δυναμιζὸν τῆς ροῆς, μετὰ τὴν τοποθέτησιν τοῦ ἀντικειμένου, ὅτι ἔχει τὴν μορφήν:

$\Omega(z) = V_0 z + G(z)$

(1)

(ἐὰν ἡ ροὴ γίνεται εἰς τὸ z -ἐπίπεδον) καὶ ἡ συνάρτησις $G(z)$ εἶναι τοιαύτη, ὥστε $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G'(z) = 0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ἔν τῆς φυσικῆς συνοπίας, ὅτι ἡ

ροή εἰς μίαν ἀρυσύντως μεγάλη ἀπόστασιν ἐν τοῦ ἀντιειμένου ἔχει ταχύτητα τῆς ὁποίας τό μέτρον εἶναι σταθερόν καί ἴσον πρὸς V_0 .

Παριστῶντες τήν ταχύτητα εἰς τό ∞ διά W_∞ , διά τόν τύπον τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος θά ἔχωμεν:

$$W(z) = U(x, y) + i V(x, y) = \overline{\Phi'(z)} = \overline{V_0} + \overline{G'(z)} \quad \eta$$

$$\overline{W(z)} = V_0 + G'(z) \quad \eta \quad \overline{W_\infty} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \overline{W(z)} = V_0 + \lim_{|z| \rightarrow \infty} G'(z) = V_0 + 0.$$

Ὅθεν,

$$\boxed{\overline{W_\infty} = V_0} \quad (2)$$

Προσέτι, τό μιγαδικόν δυναμικόν δύναται νά ἐυλεγχῇ εἰς τρόπον, ὥστε μία τῶν ρευματικῶν γραμμῶν νά παριστᾷ τό σύνορον αὐτοῦ τοῦ ἀντιειμένου ἐπὶ τοῦ z -ἐπιπέδου.

II. Ροή περίε κυλινδρου.

Ἐς θεωρήσωμεν τό υδρασσιῶν παράδειγμα τοῦ ὀρθοῦ κυλινδρου μέ μοναδιαία ἀκτίνα, ὅστις τοποθετεῖται εἰς ἓνα εὐρύσφῳμα τῆς ροῆς ρευστοῦ μέ ὁμαλή ταχύτητα, ἔστω U_0 , καί τοῦ ὁποίου (κυλινδρου) ὁ ἄξονας εἶναι κἀθετος πρὸς τήν διεύθυνσιν τῆς ροῆς. Διὰ νά μελετήσωμεν τήν ροήν περίε τοῦ κυλινδρου παριστῶμεν τόν κυλινδρον ὑπό τοῦ κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ καί ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ ροή μαυρά τοῦ κυλινδρου εἶναι παράλληλος πρὸς τόν ἄξονα τῶν x . Λόγω τῆς συμμετρίας, ὁ ἄξων τῶν x ὁ εὐρισκόμενος ἐντός τοῦ κυλινδρου δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἓνα σύνορον καί ὡς ἐν τούτου τό ἄνω μέρος τοῦ σχήματος ὡς τόπος τῆς ροῆς (βλ. Σχ. 2).

Τό σύνορον αὐτοῦ τοῦ χωρίου τῆς ροῆς συνίσταται ἀπό τήν ἄνω ἡμιπερίφεραν καί τό μέρος τοῦ ἄξονος τῶν x ἐξωτερικοῦ αὐτοῦ τοῦ κυλινδρου. Τό σύνορον τοῦτο ὑπό τῶν μετασχηματισμοῦ:

$$W = z + \frac{1}{z} \quad (1) \quad (W = u + iv)$$

ἀπεικονίζεται εἰς ὁλόκληρον τόν ἄξονα τῶν u , τό δέ χωρίον εἰς τό ὁποῖον λαμ-

θάνει χώραν ή ροή άπεινόνίζεται εις τό ήμιεπιπέδον $\eta \text{ m} \omega = v \geq 0$, όπως δεινύεται εις τό Σχ. 15 σελ. 259. Έπειδή ή ροή έχει σταθερόν ταχύτητα V_0 , τό μιγαδιόν δύναμιόν της ροής εις τό W - επίπεδον θά είναι:

$$\Omega(W) = v_0 W \quad (2)$$

Όθεν, λόγω των (1) και (2), τό μιγαδιόν δύναμιόν της ροής διά τό χωρίον περίε του υνύλου θά είναι:

$$F(z) = v_0 \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (3)$$

ή δέ ταχύτης της ροής περίε του υνύλου είναι:

$$v = \overline{F'(z)} = v_0 \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad (4)$$

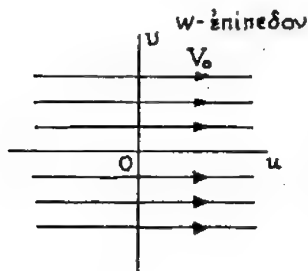
και ή όποία μαθώς τό $|z|$ αυξάνει ή U "πλησιάζει" την ταχύτητα v_0 . αυτό σημαίνει, ότι διά τά σημεία εις μεγάλην απόστασιν από τον υνύλον ή ροή είναι όμοιόμορφος.

Ευνόλως διαπιστουται, ότι αι ρευματιυαί γραμμάι εις σύστημα πολυωνών συντεταγμένων θά είναι:

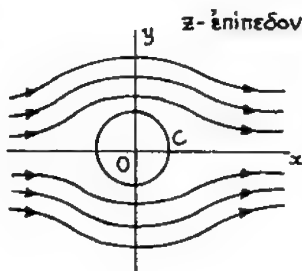
$$v_0 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) \eta \mu \theta = C \quad (5)$$

όπου C : σταθερά (βλ. Σχ.2). Άς σημειωθῇ ότι διά $C=0$ ή ρευματιυή γραμμή είναι ό υνύλος $\tau=1$ και τό τμήμα του x μέ $|x| \geq 1$.

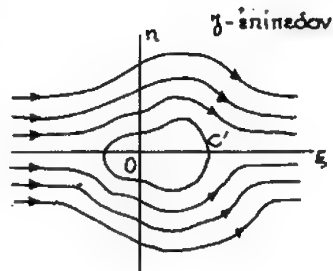
Άναλόγως, εάν ή $z = F(\eta)$ άπεινόνιση την C και τό έξωτεριόν μέρος αυτής τό εύρισυόμενον άνω του z -ήμιεπιπέδου επί της C και του έξωτεριου του μέρους αυτής του εύρισυόμενου άνω του η -ήμιεπιπέδου (βλ. Σχ.3), τότε τό μιγαδιόν δύναμιόν διά την ροήν του Σχ.3 επιτυγχάνεται αντιυαθιστώντες τό z υπό της $F(\eta)$ εις την σχέση (3).



Σχ.1



Σχ.2



Σχ.3

Τό μιγαδιόν δύναμιόν δύναται επίσης να επιτευχθῇ άναχωρούντες άπ' ευ-

θείας από τό W - επίπεδον εἰς τό ζ - επίπεδον χρησιμοποιοῦντες ἕναν κατάλ-
ληλον μετασχηματισμόν.

Παρατήρησις: Ἐν τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ γνῶσις τῆς συμμόρφου ἀ-
πειμονίσεως εἶναι συχνάκις χρήσιμος διά τήν εὕρεσιν τοῦ μιχαδίου δύνα-
μιου μιᾶς ροῆς περίεᾳ ἑνός ἀντιυειμένου τοποθετημένου ἐντός τῆς ροῆς.

Τά ἀνωτέρω εὐρίσουσιν μεγάλην ἐφαρμογὴν καὶ εἰς τὴν ἀεροδυναμικὴν, ω-
ρίως δὲ εἰς τὴν κίνησιν ἀεροπλάνου. Πρὸς τούτοις, ἡ κίνησις ἀεροπλάνου
ἐντός ἡρέμου ἀτμοσφαίρας δύναται νά θεωρηθῇ ὡς πραγματοποιοῦσα μίαν ἐπί-
πεδον καὶ ὁμοιόμορφον ροὴν ἔχουσα (ἡ ροή) ταχύτητα ἴσην πρὸς τὴν σταθε-
ρὰν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου, ἔστω U_0 καὶ τό ὅποῖον θεωροῦμεν ἐν προει-
μένῳ αἰνιγτον. Εἰς τὴν παρούσαν περίπτωσιν ἑξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον παρου-
σιάζει τό πρόβλημα τῆς ροῆς περί ἑνα ἐμπόδιον σχήματος τῶν πτερύγων τοῦ
ἀεροπλάνου.

Θεώρημα XII-2-1. (Μόμος τοῦ Bernoulli).

Ἐάν $P = P(x, y)$ εἶναι ἡ πίεσις τῆς ροῆς εἰς τό σημεῖον (x, y) , W τό μιχαδικόν
δυναμικὸν τῆς ροῆς καὶ ρ ἡ πυκνότης τοῦ ρευστοῦ (ὑποδέτοντες ὅτι αὕτη
εἶναι σταθερά), τότε κατὰ μήκος καὶθε ρευματικῆς γραμμῆς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$P + \frac{1}{2} \rho |W|^2 = K \quad (3),$$

ὅπου K σταθερά ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ρευματικὴν γραμμὴν. Ἡ ἰσοδυνάμως:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = K \quad (3')$$

ὅπου v εἶναι τό μέτρον τῆς ταχύτητος τῆς ροῆς.

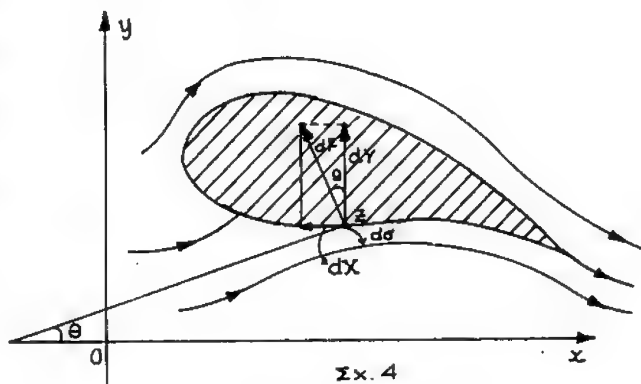
Θεώρημα XII-2-2. (Blasius). "Ἐστω ὅτι τό $\Omega(z)$ παριστᾷ τό μιχαδικὸν δύνα-
μικὸν περιγράφον τὴν ροὴν περίεᾳ ἑνός κυλινδρικοῦ ἀντιυειμένου μοναδιαίου
ὑψους μέ ἀξονα καὶθετον πρὸς τό επίπεδον z τῆς ροῆς καὶ τοῦ ὁποίου τό
σύνορον εἰς τό z - επίπεδον εἶναι ἡ τμηματικῶς λεία καμπύλη C . Τότε:
1ῃ/ Ἡ δύναμις ἡ προερχομένη ἐκ τῆς πίεσεως τοῦ ρευστοῦ ἐπὶ τοῦ ἀντιυειμέ-
νου δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\bar{F} = X - i Y = \frac{1}{2} i \rho \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz \quad (1)$$

όπου X και Y είναι οι συνιστώσες της δύναμews λαμβανόμεναι κατά την διευ-
 υτήν διεύθυνσιν τών άξόνων x και y αντίστοιχως και P ή πυκνότης τωρευσά.
 22/ Έάν M παριστā την όλιυήν ροπήν ως πρὸς την άρχήν τών άξόνων τών πιέ-
 σεων επί του άντικειμένου, αὐτή θά δίδεται υπό του τύπου:

$$M = \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz \right\}.$$

Απόδειξις: Η δύναμις ή επιδρῶσα επί του στοιχειώδους τόξου μήκους $d\ell$
 (βλ. Σχ. 4) είναι κάθετος πρὸς
 τὸ στοιχείον $d\ell$ διευθυνομένηκ
 τών ἔξω πρὸς τὰ μέσα και τὸ μέ-
 τρον αὐτῆς θά είναι $dF = P \cdot d\ell$,
 όπου P είναι ή πίεσις εἰς τό ση-
 μεῖον $z = x + iy$. Αναλύοντας αὐ-
 τήν τή δύναμιν εἰς συνιστώσας
 παραλλήλους πρὸς τοὺς άξονας
 ox , oy και λαμβάνοντες τὰς
 συνιστώσας κατά την διευυτήν διεύθυνσιν τών άξόνων θά ἔχωμεν:



$$dF = dX + idY = -P d\ell \eta \mu \theta + i P d\ell \sigma \nu \theta = i P d\ell (\sigma \nu \theta + i \eta \mu \theta) = i P d\ell e^{i\theta} \quad (1)$$

ἘΕ ἄλλου είναι:

$$dz = dx + i dy = d\ell \sigma \nu \theta + i d\ell \eta \mu \theta = d\ell e^{i\theta} \quad (2)$$

Η (1), λόγω της (2), γίνεται:

$$dF = i P dz \quad (3)$$

Ἐπειδή ή καμπύλη C παριστā μίαν ρευματινήν γραμμήν, συμφώνως πρὸς
 τὸν Νόμον του Bernoulli θά ἔχωμεν: $P = k - \frac{1}{2} \rho v^2$. ἘΕ ἄλλου βάσει τών τυ-
 πων (17), §1 θά ἔχωμεν: $v = \left| \frac{d\phi}{dz} \right|$, ἔξ ἧς $\frac{d\phi}{dz} = v e^{-i\theta}$.

Ὅθεν, ή όλιυή δύναμις $F = X + iY$ ή επιδρῶσα επί της καμπύλης Γ θά δίδε-
 ται, λόγω της (3), υπό του όλουληρωματος:

$$F = X + iY = \oint_C i P dz = i \oint_C \left(k - \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dz = -\frac{1}{2} i \rho \oint_C v^2 dz = -\frac{1}{2} i \rho \oint_C v^2 e^{i\theta} d\ell = -\frac{1}{2} i \rho \oint_C (v^2 e^{2i\theta}) (e^{-i\theta} d\ell) \quad (4)$$

$$\tilde{F} = X - iY = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \rho \oint_C (v^2 e^{2i\theta}) (e^{i\theta} d\theta) = \frac{1}{2} i \cdot \rho \oint_C \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 \cdot dz \quad (5)$$

2^α/ θεωρούμεν ως δειντήν ροπήν αὐτήν που ἡ ἐπιδρῶσα δύναμις στρέφει τὸ σύστημα κατὰ τὴν φοράν τὴν ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δειντῶν τοῦ ὠρολογίου. Ἡ ροπή ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῆς δυνάμεως τῆς ἐπιδρώσης ἐπὶ τοῦ στοιχείου ds θὰ εἶναι:

$$dM = (P d\ell \eta \mu \theta) y + (P d\ell \sigma \nu \theta) x = P (y dy + x dx)$$

διότι $d\ell \sigma \nu \theta = dy$, $d\ell \eta \mu \theta = dx$.

Ἡ ὁλική ροπή ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν θὰ εἶναι:

$$M = \oint_C P (y dy + x dx) \quad (6)$$

Ἐκ τοῦ Νόμου τοῦ Bernoulli εἶναι $P = k - \frac{1}{2} \rho v^2$, καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ (6) γίνεται:

$$\begin{aligned} M &= \oint_C \left(k - \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \cdot (y dy + x dx) = k \oint_C (y dy + x dx) - \frac{1}{2} \rho \oint_C v^2 (y dy + x dx) \\ &= 0 - \frac{1}{2} \rho \oint_C v^2 \cdot (x \sigma \nu \theta + y \eta \mu \theta) d\ell, \end{aligned}$$

καθ' ὅτι $\oint_C (y dy + x dx) = 0$, ἐπειδὴ τὸ $y dy + x dx$ εἶναι τέλειον διαφορικόν. Ὅθεν:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} \rho \oint_C v^2 (x \sigma \nu \theta + y \eta \mu \theta) d\ell = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C v^2 (x + iy) (\sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta) d\ell \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C v^2 z \cdot e^{-i\theta} d\ell \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C z (v^2 \cdot e^{-2i\theta}) \cdot (e^{i\theta} d\ell) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz \right\} \end{aligned}$$

Παρατήρησις: Συχνὰ γράφομεν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$M + iN = -\frac{1}{2} \rho \oint_C z \cdot \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz, \quad \text{ὅπου τὸ } N \text{ δὲν ἔχει ὁπλὴν φυσικὴν ἐρμηνείαν.}$$

Ἐφαρμογή: Νὰ διερευνηθῇ ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ ἔχοντος μιγαδικὸν δυναμικόν:

$$\phi(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \log z$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δύναμις ἡ ἐπιδρῶσα ἐπὶ ἑνὸς κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου τοποθετουμένου ἐντὸς τοῦ ρευστοῦ εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ἄξων τοῦ κυλινδρικοῦ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς ροῆς.

Λύσις: Έστω $z = r e^{i\theta}$, τότε θα έχουμε:

$$\Omega(z) = \phi + i\psi = U_0 \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} + i \left\{ U_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \cos\theta + \frac{\gamma}{2\pi} \log r \right\} \quad (1)$$

Όθεν, αἱ ἰσοδυναμικαὶ γραμμαὶ υαδῶς καὶ αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ θα εἶναι ἀντιστοιχῶς:

$$U_0 \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \sin\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} = a \quad (2), \quad U_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \cos\theta + \frac{\gamma}{2\pi} \log r = b \quad (3)$$

Τὰ σημεῖα ἀμνηστίας τῆς ροῆς ἀντιστοιχοῦν, ὅταν

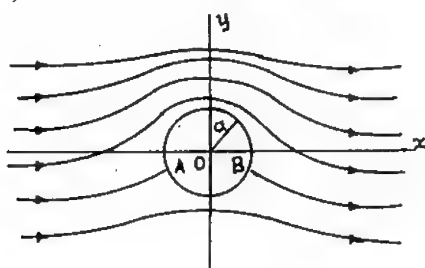
$$\Omega'(z) = 0, \text{ ὅπλ. ὅταν } U_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} = 0 \quad \eta$$

$$z = \frac{-i\gamma}{4\pi U_0} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\gamma^2}{16\pi^2 U_0^2}}$$

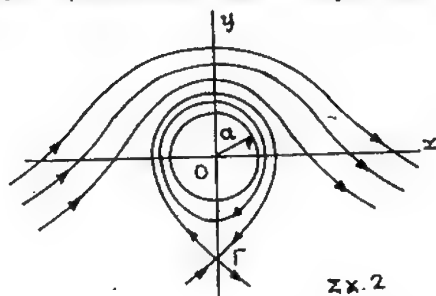
καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $\gamma = 4\pi a U_0$, ὑπάρχει ἓνα μόνον σημεῖον.

Ἐπειδὴ λόγῳ τῆς (3) ἡ $r = a$ (ὅπλ. ἡ περιφέρεια) εἶναι μία ρευματικὴ γραμμὴ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ $b = \frac{\gamma}{2\pi} \log a$, ἡ ροὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινομένη περὶ ἓνός κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου (βλ. σχ. 1) (Ροὴ περὶ κυλινδρικοῦ κυλίνδρου). Θὰ εἶναι δὲ ἡ ταχύτης τῆς ροῆς διὰ τὰ σημεῖα τὰ εὐρισκόμενα εἰς μεγάλην ἀπόστασιν $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Omega'(z) = U_0$, ὅπλ. σταδερὰ.

Ἡ μορφή τῆς ροῆς ἀλλάσσει, ἐξαρτωμένη ἐνάστωτε ἀπὸ τὴν τιμὴν τοῦ γ . Εἰς τὰ σχ. 1 καὶ 2 δεκνύομεν δύο δυνατοὺς τρόπους ροῆς. Τὸ σχ. 1 ἀντιστοιχεῖ ὅταν $\gamma < 4\pi a U_0$ καὶ τὰ σημεῖα ἀμνηστίας τῆς ροῆς εἶναι Α καὶ Β. Τὸ σχ. 2 ἀντιστοιχεῖ, ὅταν $\gamma > 4\pi a U_0$ καὶ ὑπάρχει ἓνα μόνον σημεῖον ἀμνηστίας τῆς ροῆς τὸ Γ.



σχ. 1



σχ. 2

Ἡ δύναμις ἡ ἐπιδρῶσα ἐπὶ τοῦ κυλινδρικοῦ ἀντικειμένου, συμφῶνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ Blasius, θα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\begin{aligned} F = X - iY &= \frac{i}{2} \rho \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz = \frac{i}{2} \rho \oint_C \left\{ U_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} \right\}^2 dz = \frac{i}{2} \rho \oint_C \left\{ U_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)^2 + \frac{2iU_0\gamma}{2\pi z} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{\gamma^2}{4\pi^2 z^2} \right\} dz \\ &= -\rho U_0 \gamma. \end{aligned}$$

§ 3. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

Ι. Ηλεκτρισμὸν πεδίου. Ὑπὸ τὸν ὅρον ηλεκτρισμὸν πεδίου ἐννοοῦμεν ἓνα διανυσματικὸν πεδίου τὸ ὁποῖον εἰς οἷονδήποτε σημεῖον τοῦ μας δίδει τὴν ἐπιδρῶσαν δύναμιν ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου θετικῶς ηλεκτρισμοῦ φορτίου τοῦ φερομένου εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Προφανῶς ἡ δημιουργία ηλεκτρισμοῦ πεδίου ὀφείλεται εἰς τὴν ὑπαρξιν ηλεκτρισμοῦ φορτίου.

Τὸ ηλεκτρισμὸν πεδίου δὲ καλεῖται ηλεκτροστατικόν, ἐὰν ἡ ἐπιδρῶσα δύναμις ἐπὶ τοῦ φερομένου μοναδιαίου ηλεκτρισμοῦ φορτίου εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου. Τὸ ηλεκτρισμὸν πεδίου δὲ καλεῖται παραλλήλου ἐπιπέδου, ἐὰν αὐτὸ εἶναι τὸ ἴδιον δι' ὅλα τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς ἓνα δοθέν ἐπίπεδον Π καὶ ὅθεν ἔχη συνιστώσας καθετοῦς πρὸς τὸ Π. Εἰς τὴν τελευταίαν αὐτὴν περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ Π εἶναι τὸ ἐπίπεδον οξυ.

Θεωροῦμεν τὸ μοναδιαῖον θετικὸν ηλεκτρισμὸν φορτίον τοποθετούμενον εἰς ἓνα τυχόν σημεῖον Α ἐνός ηλεκτροστατικῶς καὶ παραλλήλου ἐπιπέδου ηλεκτρισμοῦ πεδίου. Ἡ δύναμις ἡ ὁποία ἀσσεῖται ἐπ' αὐτοῦ τοῦ φορτίου καλεῖται ἐντασις τοῦ ηλεκτρισμοῦ πεδίου εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἡ ἐντασις εἶναι μία διανυσματικὴ συνάρτησις δύο μεταβλητῶν (ἐπίπεδον οξυ) καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ συμβόλου $E(x,y)$. Εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον δυνάμεθα ὡς ἐν τούτῳ νὰ γράψωμεν:

$$E(x,y) = E_x(x,y) + i E_y(x,y) \quad (1)$$

ὅπου $E_x(x,y)$ εἶναι ἡ x -συνιστώσα τοῦ πεδίου καὶ ἡ $E_y(x,y)$ εἶναι ἡ y -συνιστώσα τοῦ πεδίου.

Ὑπάρχει πάντοτε μία πραγματικὴ συνάρτησις $\phi(x,y)$ ἀλλοιούμενη ηλεκτροστατικὸν δυναμικόν τοιαύτη, ὥστε:

$$E(x,y) = -\text{grad } \phi(x,y) = -\nabla \phi \quad (2)$$

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), γράφεται:

$$E(x,y) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3)$$

$$\text{ὅπου} \quad E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4)$$

Τὸ πρόβλημα τῆς ηλεκτροστατικῆς συνίσταται εἰς τὸ νὰ προσδιορίσωμεν

τὸ στατιῶν ἡλεκτριῶν πεδίων παραχόμενον εἰς ἓνα μέσον ὑπὸ μιᾶς δοθείσης κατανομῆς τοῦ ἡλεκτριῶν φορτίου. Πρὸς τοῦτοις εἰς τὰ διάφορα προβλήματα τοῦ ἡλεκτρισμοῦ μᾶς δίδεται, εἴτε ἡ πυκνότης κατανομῆς τοῦ ἡλεκτριῶν φορτίου ὡς μία συνάρτησις τῶν συντεταγμένων $P(x, y)$, εἴτε τοῦ ὅλμου φορτίου κατανεμημένου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας θεωρουμένης ὡς ἰδανικοῦ ἡλεκτριῶν ἀγωγοῦ. Αἱ βασικαὶ ἐξισώσεις αἱ διέπουσαι τὴν ἔντασιν ἑνὸς ἡλεκτροστατιῶν πεδίου δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ Maxwell, ἥτοι:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 4\pi\rho \quad (6)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἡλεκτριῶν φορτίου τὸ ὁποῖον παράγει τὸ δοθέν ἡλεκτριῶν πεδίου.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell γράφονται καὶ ὑπὸ τὴν κατωθι μορφήν:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (5')$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -4\pi\rho \quad (6')$$

II. Μιγαδικοῦν ἡλεκτροστατιῶν δυναμιῶν.

Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (6') προκύπτει ὅτι εἰς ἓνα πεδίου μενοῦ φορτίου $\rho=0$ τὸ ἡλεκτροστατιῶν δυναμιῶν, δηλ. ἡ συνάρτησις $\Phi(x, y)$, εἶναι ἁρμονικὴ.

Εἶναι λοιπὸν δυνατόν εἰς αὐτὸ τὸ πεδίου νὰ κατασκευάσωμεν μίαν ἀναλυτικὴν συνάρτησιν τῆς μιγαδικῆς μεταβλητῆς z , ἥτοι τὴν συνάρτησιν:

$$\Omega(z) = \Psi(x, y) + i\Phi(x, y) \quad (7)$$

ὅπου ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $\Psi(x, y)$ εἶναι ἡ συζυγὴς ἁρμονικὴ τῆς $\Phi(x, y)$.

Ἡ συνάρτησις $\Omega(z)$ καλεῖται μιγαδικοῦν ἡλεκτροστατιῶν δυναμιῶν καὶ παίζει σπουδαιότατον ρόλον εἰς τὸν Στατιῶν ἡλεκτρισμόν.

Ἐξ ὅσον ἡ $\Psi(x, y)$ εἶναι συζυγὴς ἁρμονικὴ τῆς $\Phi(x, y)$, αὗται αἱ συναρτήσεις θά πληροῦν τὰς συνθήκας τῶν Cauchy-Riemann, ἥτοι:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (8)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (3), (8) καὶ (7) λαμβάνομεν:

$$\mathcal{E}(x,y) = E_x + i E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -i \overline{\mathcal{Q}'(z)} \quad (9)$$

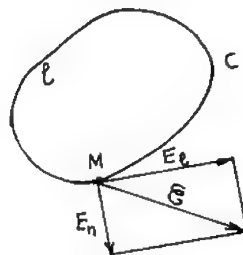
Όθεν, τό μέτρον E τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathcal{E}(x,y)$ δά εἶναι:

$$E = |\mathcal{E}(x,y)| = |-i \overline{\mathcal{Q}'(z)}| = |\mathcal{Q}'(z)| \quad (10)$$

Αἱ ἐπίπεδοι καμπύλαι $\Phi(x,y) = \alpha$ αὐταί εἰς τόν χώρον τῶν τριῶν διαστάσεων παριστοῦν κυλινδρικῆς ἐπιφανείας - καλοῦνται ισοδυναμικαί γραμμαί τοῦ δοθέντος πεδίου. Ἐνῶ αἱ καμπύλαι $\Psi(x,y) = \beta$ καλοῦνται γραμμαί δυναμικῆς τοῦ πεδίου.

Ὅπως ἐδείχθη καί εἰς τήν § 1, αἱ δύο οἰκογένειαι τέμνονται ὀρθογωνίως.

III. Θεώρημα τοῦ Gauss. Ἐστω ὅτι τό φορτίον τό πρῶτον τό ἡλεκτρικόν πεδίου εἶναι συγκεντρωμένον εἰς κάποιο πεδίου τό ὅποιον φράσσεται ὑπό μιᾶς κλειστῆς καμπύλης C_0 ¹⁾. Ἡδὴ θεωροῦμεν μίαν κλειστήν καμπύλην C περιελείουσα τήν C_0 (βλ. Σχ.1) καί ἔστω \mathcal{E} ἡ ἔντασις τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τό σημεῖον M τῆς καμπύλης. Ἀναλύομεν τό διάνυσμα \mathcal{E} εἰς δύο συνιστώσας E_ℓ καί E_n ἐν τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι ἐφαπτομενική καί ἡ ἄλλη κἀθετος ἐπὶ τήν C εἰς τό M . Τό θεώρημα τοῦ Gauss ἔχει ὡς ἀμολούδως:



Σχ. 1

Θεώρημα XII-3-1. Ἐάν E_n εἶναι ἡ κἀθετος συνιστώσα τῆς ἔντασεως τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου καί q εἶναι τό ἡλεκτρικόν φορτίον πού ἐκκλίνεται ὑπό τῆς C (δηλ. τό q εἶναι φορτίον πού εἶναι κατανεμημένον ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τοῦ χώρου μέ μοναδιαῖον ὕψος) τότε δά ἔχωμεν:

$$\oint_C E_n d\ell = 4\pi q \quad (12)$$

Ἡ ἔκφρασις $\oint_C E_n d\ell$ καλεῖται ροή (ἡλεκτρική) διὰ μέσου τῆς C , ἐνῶ ἡ ἔκφρασις $\oint_C E_\ell d\ell$ καλεῖται κυκλοφορία διὰ μέσου τῆς C .

¹⁾ Αὐτό σημαίνει ὅτι εἰς τόν χώρον τά φορτία εἶναι κατανεμημένα ἐντός ἑνός ἀπείρου κυλίνδρου καί τοῦ ὁποῦ αὐτοὶ κἀθετοί τομαί τῶν περιγραμμάτων εἶναι παράλληλοι μετατοπίσεις τῆς C_0 . Ἡ πυκνότης κατανομῆς τῶν φορτίων δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν συντεταγμένην z κατὰ μήκος τῆς γεννετικῆς τοῦ κυλίνδρου, ἀλλὰ εἶναι μόνον μία συνάρτησις τῶν x, y ἐντός τῆς κἀθετου τομῆς.

Ἡ ἔντασις \mathcal{E} τοῦ ἡλεκτρισμοῦ πεδίου ἀναλύεται ὡς κατωθι:

$$\mathcal{E} = E_t \cdot \tau + E_n \cdot \eta \quad (13)$$

ὅπου τ καὶ η τὸ μοναδιαῖον εφαπτομενιὸν καὶ κάθετον διάνυσμα τῆς καμπύλης ἀντιστοίχως.

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (13) ἑσωτερικῶς ἐπὶ τ λαμβάνομεν:

$$E_t = \mathcal{E} \cdot \tau \quad (14)$$

Ἐπειδὴ $\mathcal{E} = (E_x, E_y)$ καὶ $\tau = \left(\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}\right)$ ἡ (14) δίδει:

$$E_t = E_x \cdot \frac{dx}{dl} + E_y \cdot \frac{dy}{dl} \quad (15)$$

Ὀμοίως πολλαπλασιάζοντες τὴν (13) ἑσωτερικῶς ἐπὶ η καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\eta = \frac{dy}{dl} - i \frac{dx}{dl}$ λαμβάνομεν:

$$E_n = \mathcal{E} \cdot \eta = E_x \cdot \frac{dy}{dl} - E_y \cdot \frac{dx}{dl} \quad (16)$$

Ἐάν ἡ καμπύλη δὲν ἐγκυβεῖται ἡλεκτρισμὸν φορτίον, τότε βάσει τοῦ τύπου (12) τοῦ Gauss θά ἔχωμεν:

$$\oint_C E_n dl = 0 \quad \eta$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (8) ἔχομεν:

$$\oint_C \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dl} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dl} \right\} dl = 2\pi q \quad \eta$$

$$\oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = 4\pi q \quad (17)$$

Ἐάν ἡ καμπύλη δὲν ἐγκυβεῖται ἡλεκτρισμὸν φορτίον, δηλ. $q = 0$, τότε ὁ (17) γίνεται:

$$\oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy = 0 \quad (18);$$

ἥτοι: ἡ ροή διὰ μέσου τῆς C θά εἶναι τότε ἴση πρὸς μηδέν.

Τέλος ἡ κυκλοφορία διὰ μέσου τῆς C βάσει τοῦ τύπου (15) θά εἶναι:

$$\oint_C E_t dl = - \oint_C \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dl} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dl} \right\} dl = - \oint_C \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \quad \eta$$

$$\oint_C E_t dl = - \oint_C d\Phi = 0 \quad (19)$$

ἥτοι: ἡ κυκλοφορία ἐνὸς ἡλεκτροστατιτικοῦ πεδίου διὰ μέσου καθευλει-

στης υαμπύλης είναι ίση πρὸς μηδέν.

Ἐπειδὴ $\Omega'(z) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \oint_C \Omega'(z) dz &= \oint_C \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} (dx + i dy) \\ &= \oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy + i \oint_C \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy \\ &= \oint_C E_n dl + i \oint_C E_t dl = 2\pi q + 0 = 4\pi q \end{aligned}$$

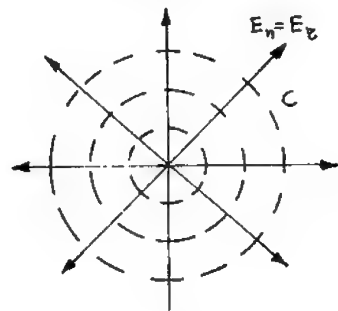
ἥτοι:

$$\oint_C \Omega'(z) dz = 4\pi q \quad (20)$$

III. Μιχαδιὸν δυναμιὸν ὀφειλόμενον εἰς ἡλεν. φορτίον.

Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖα γραμμὴν φορτισμένην μὲ ἡλετριὸν φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους καὶ ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὸ z -ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον $z=0$.

Τὸ ἡλετριὸν πεδίον τὸ ὀφειλόμενον εἰς τὸ φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους εἶναι αὐτινωτὸν (βλ. Σχ. 2) καὶ ἡ κάθετος συνιστῶσα τοῦ ἡλεκτρικοῦ διανυσματικοῦ πεδίου εἶναι σταθερά καὶ ἴση πρὸς E_z ἐπὶ ἐκείνης περιφερείας (θ, r) , ἡ δὲ ἑφαπτομενιὴ συνιστῶσα εἶναι μηδέν. Ἐὰν



Σχ. 2.

C εἶναι ἓνας τυχὼν κυλινδρος (κυυλινδρὸς) αὐτίνος r μὲ ἄξονα διερχόμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον $z=0$, τότε, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Gauss θὰ ἔχωμεν:

$$\oint_C E_n dl = E_z \oint_C dl = E_z \cdot 2\pi r = 4\pi q.$$

Ὅθεν,

$$E_z = \frac{2q}{r}$$

Ἐπειδὴ $E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ θὰ ἔχωμεν $\Psi = -2q \log r$, ὅπου παραλείψαμεν τὴν σταθεράν τῆς ὀλουθηρώσεως. Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις Ψ εἶναι τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς συναρτήσεως $\Omega(z) = -2q \log z$, ἡ ὁποία εἶναι τὸ μιχαδιὸν δυναμιὸν τοῦ πεδίου. Ἐὰν ἡ φορτισμένη εὐθεῖα γραμμὴ δέρεται διὰ τοῦ σημείου $z=a$, τότε τὸ δημιουργούμενον ὑπὸ αὐτῆς μιχαδιὸν δυναμιὸν θὰ εἶναι:

$$\boxed{\Omega(z) = -2q \log(z-a)} \quad (21)$$

Τό μιγαδικόν δυναμιόν θά παριστᾷ μίαν πηγήν ἢ ἓνα φρέαρ, ἐάν τό $q < 0$ ἢ $q > 0$ ἀντιστοίχως.

Ἐφαρμογές 1/ θεωροῦμεν τό μιγαδικόν δυναμιόν :

$$\Omega(z) = az \quad (a > 0)$$

Τοῦτο ὀρίσκει εἰς ὁλόκληρον τό μιγαδικόν ἐπίπεδον ἓνα ἡλεκτρικόν πεδίου.

Εἶναι $\Omega'(z) = a$. Τό ἡλεκτροστατιόν δυναμιόν θά δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως :

$$\mathcal{E}(x, y) = E_x + i E_y = -i \overline{\Omega'(z)} \quad \text{ἢ} \quad E_x + i E_y = -i \cdot a$$

Ὅθεν :

$$E_x = 0, \quad E_y = -a$$

Εἶναι δέ :

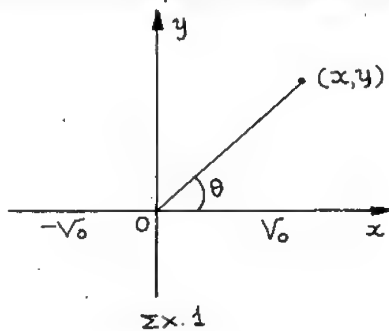
$$\Omega(z) = a(x + iy) = ax + iay.$$

Συνεπῶς, λόγῳ τῆς σχέσεως (7), θά ἔχωμεν :

$$\Psi = ax \quad \text{καί} \quad \Phi = ay.$$

Αἱ ἰσοδυναμιαὶ γραμμαὶ εἶναι αἱ $ay = \text{σταθ}$ ἢ $y = \text{σταθ}$, δηλ. εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ox , ἐνῶ αἱ γραμμαὶ δυνάμεως εἶναι αἱ $ax = \text{σταθ}$ ἢ $x = \text{σταθ}$, δηλ. εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα oy .

29/ Νά εὐρεθῇ τό δυναμιόν εἰς καθε σημείον τοῦ χωρίου τοῦ δεικνυομένου εἰς τὸ Σχ. 1, ἐάν τὰ δυναμιά ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι ἀντιστοίχως V_0 διὰ $x > 0$ καὶ $-V_0$ διὰ $x < 0$. Ἐν συνεχείᾳ προσδιορίσατε τὰς ἰσοδυναμιαῖς γραμμάς καὶ τὰς δυναμιαῖς γραμμάς.



Λύσις: Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν μίαν ἀρμονικὴν συνάρτησιν εἰς τό μιγαδικόν ἐπίπεδον, ἥ ὅποια νά λαμβάνη τὰς τιμὰς V_0 διὰ $x > 0$ καὶ $-V_0$ διὰ $x < 0$. πρὸς τούτοις θά ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ Poisson, ὅτε θά ἔχωμεν :

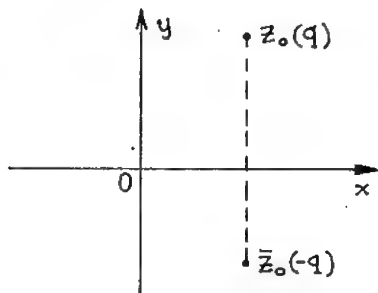
$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{-V_0 dn}{y^2 + (x-n)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V_0 dn}{y^2 + (x-n)^2} = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dn}{y^2 + (x-n)^2} = V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{y}{x}\right).$$

Αἱ ἰσοδυναμιαὶ γραμμαὶ εἶναι $V_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctan} \frac{y}{x}\right) = a$, δηλ. $y = mx$, ὅπου m

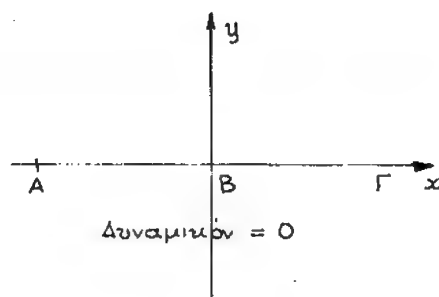
σταθερά. Αὗται εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς. Αἱ δὲ γραμμαὶ δυνάμεως εἶναι αἱ $x^2 + y^2 = \beta$, δηλ. ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ δίκτυον τῶν ἰσοδυναμιῶν γραμμῶν ὀρθογωνίως.

35/ Νὰ εὐρεθῇ τὸ δυναμιὸν τὸ ὀφειλόμενον εἰς ἓνα γραμμιῶν φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους εἰς τὸ σημεῖον $z = z_0$ καὶ εἰς τὸ γραμμιῶν φορτίον $-q$ ἀνά μονάδα μήκους εἰς τὸ σημεῖον $z = \bar{z}_0$. Ἐν συνεχείᾳ νὰ προσδιορισθῇ τὸ δυναμικὸν ἐπὶ τοῦ ἀπείρου ἐπιπέδου $AB\Gamma$ (βλ. Σχ. 2) καθετοῦ πρὸς τὸ z -ἐπιπέδον καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ox .

Λύσις: Τὸ μιγαδικὸν δυναμιὸν τὸ ὀφειλόμενον εἰς αὐτὰ τὰ δύο γραμμιῶν φορτία q καὶ $-q$ ἀνά μονάδα μήκους τὰ εὐρισκόμενα εἰς τὰ σημεῖα z_0 καὶ \bar{z}_0 εἶναι:



Σχ. 1



Σχ. 2

$$\Omega(z) = -2q \log(z - z_0) + 2q \log(z - \bar{z}_0) = 2q \log\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right) \quad (1)$$

Ὁθεν, τὸ ζητούμενον δυναμιὸν δά εἶναι:

$$\Psi(x, y) = 2q \operatorname{Re} \left\{ \log\left(\frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0}\right) \right\} \quad (2)$$

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον ἀρμεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $\Psi = 0$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ox , δηλ. τὸ $AB\Gamma$ (βλ. Σχ. 2) ἔχει δυναμιὸν μηδέν. Θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (1) $z = x$ λαμβάνομεν:

$$\Omega = 2q \log\left(\frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0}\right) \text{ καὶ } \bar{\Omega} = 2q \log\left(\frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}\right) = -\Omega,$$

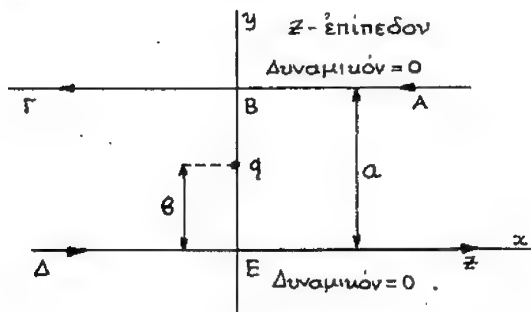
ἥτοι: $\bar{\Omega} + \Omega = 0$ ἢ $\psi - i\phi + \psi + i\phi = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $\psi(x, y) = 0$.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἀντισταστήσωμεν τὸ φορτίον $-q$ εἰς τὸ \bar{z}_0 ὑπὸ ενός ἐπι-

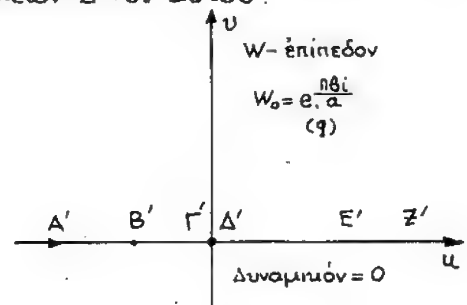
πέδου ΑΒΓ ἔχοντος δυναμιὸν μηδέν (βλ. Σχ.2) καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν τὸ δυναμιὸν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x εἶναι μηδέν, τότε τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προερχόμενον ἀπὸ τὰ φορτία q εἰς τὸ Z_0 καὶ $-q$ εἰς τὸ \bar{Z}_0 .

49/ Δύο ἄπειρα παράλληλα ἐπίπεδα εὐρίσκονται εἰς μίαν ἀπόστασιν a μεταξύ των καὶ ἔχουν δυναμιὸν μηδέν. Ἐνα γραμμικὸν φορτίον q ἀνά μονάδα μήκους τοποθετεῖται μεταξύ αὐτῶν τῶν ἐπιπέδων καὶ εἰς ἀπόστασιν b ἀπὸ τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν. Νά προσδιορισθῇ τὸ δυναμιὸν εἰς καθεστὸν σημεῖον εὐρισκόμενον μεταξύ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Λύσις: Ἐστω ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (βλ. Σχ.1) παριστοῦν τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα καθεστὰ πρὸς τὸ z -ἐπίπεδον καὶ ὑποδέτομεν ὅτι τὸ γραμμικὸν φορτίον διέρχεται ἀπὸ τὸν φανταστικὸν ἄξονα ἀπὸ τὸ σημεῖον $Z=b$ αὐτοῦ.



Σχ.1



Σχ.2

Ἐὰν ἐπιτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $W = e^{\frac{n\delta}{a}}$, οὗτος ἀπεικονίζει τὴν ἄπειρον λωρίδα ΑΒΓΔΕΖ τοῦ z -ἐπιπέδου (βλ. Σχ.1) εἰς τὸ $\Im W \geq 0$ τοῦ W -ἐπιπέδου (βλ. Σχ.2), τὸ δὲ γραμμικὸν φορτίον q εἰς τὸ σημεῖον $Z=b$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ γραμμικὸν φορτίον q εἰς τὸ σημεῖον $W = e^{\frac{n\delta b}{a}}$, τὸ δὲ σύνορον ΑΒΓΔΕΖ τοῦ Σχ.1 (τὸ ὁποῖον ἔχει δυναμιὸν μηδέν) ἀπεικονίζεται εἰς τὸν u -ἄξονα Α'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ' τοῦ W -ἐπιπέδου (ὁ ὁποῖος ἔχει δυναμιὸν μηδέν), ὅπου τὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ' συμπίπτουν μετὰ $W=0$, (βλ. Σχ.2). Ἐπειδὴ τὸ δυναμιὸν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν u εἶναι μηδέν, τὸ δυναμιὸν εἰς τὸ W -ἐπίπεδον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προερχόμενον ἀπὸ τὰ φορτία q καὶ $-q$ τοποθετημένα εἰς τὰ σημεῖα W_0 καὶ \bar{W}_0 ἀντιστοίχως. Ὅθεν, διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς δυναμιτικῆς συναρτήσεως ψ ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον (2) τῆς προηγουμένης ἐ-

φαρμογῆς, ὅτε δὲ ἔχουμεν :

$$\Psi(x,y) = 2q \operatorname{Re} \left\{ \log \left(\frac{w - e^{\frac{-\pi bi}{a}}}{w - e^{\frac{\pi bi}{a}}} \right) \right\}.$$

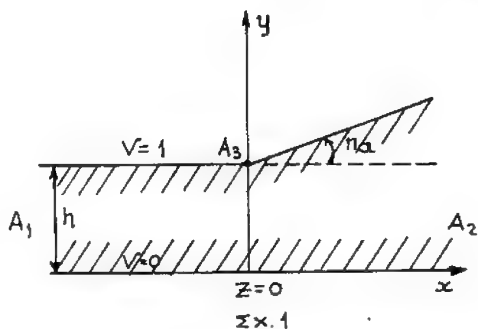
Τότε τὸ δυναμιὸν εἰς ὑάθε σημεῖον τοῦ χωρίου τοῦ z -ἐπιπέδου ποῦ περι-
υλίζεται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ δὲ εἶναι :

$$\Psi(x,y) = 2q \operatorname{Re} \left\{ \log \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{\frac{-\pi bi}{a}}}{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{\frac{\pi bi}{a}}} \right) \right\}.$$

5^η Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πεδίον τὸ δημιουργούμενον ὑπὸ ἑνὸς ἀπείρου δύο διαστά-
σεων πυκνωτοῦ¹⁾ τοῦ δεικνυμένου εἰς τὸ Σχ.1.

Λύσις : Κατ' ἀρχάς προσδιορίζομεν τὴν συνάρτησιν $z = \varphi(w)$, ἡ ὁποία καθο-
ρίζει τὴν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τοῦ ἄ-
νω μέρους τοῦ w -ἐπιπέδου ($\operatorname{Im} w > 0$) ἐ-
πὶ τοῦ γραμμοσυνισθέντος χωρίου τοῦ
 z -ἐπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὸ χωρίον εἶναι τὸ «τρίγωνον»
 $A_1 A_2 A_3$ μετὰ κορυφὰς τὰ A_1 καὶ A_2 εἰς τὸ
ἀπείρον, ἡ ζητούμενη ἀπεικόνισις δύ-
ναιτο νὰ ἐπιτευχθῇ μέσῳ τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν Schwartz-Christoffel
(βλ. κεφ. X, § 4). Οὕτω θέτομεν τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων τοῦ
πραγματικοῦ ἄξονος ou τοῦ w -ἐπιπέδου καὶ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου $A_1 A_2 A_3$.



$$A_1 \longrightarrow w = 0$$

$$A_2 \longrightarrow w = \infty$$

$$A_3 \longrightarrow w = -1$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι, ἀντιστοίχως, πρὸς
τὰς γωνίας $\Pi\alpha_1 = 0$, $\Pi\alpha_2 = -\Pi\alpha$, $\Pi\alpha_3 = \Pi(1+\alpha)$, ἡ ζητούμενη ἀπεικόνισις δὲ εἶναι :

$$z = C \cdot \int_{w_0}^w \eta^{-1} \cdot (1+\eta)^\alpha d\eta + C_1, \quad (1)$$

Ἀπὸ τὴν ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων $A_3 (z=ih)$ καὶ $w=-1$ ἔπεται, ὅτι διὰ

¹⁾ Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι αἱ πλάται τοῦ πυκνωτοῦ θεωροῦνται χωρὶς πάχος.

$w_0 = -1$ λαμβάνομεν ἐν τοῦ τύπου (1):

$$z = C \cdot \int_{-1}^w \eta^{-1} \cdot (1+\eta)^a d\eta + ih \quad (2)$$

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς σταθερᾶς C παρατήροῦμεν ὅτι, ἐάν διαγράψωμεν πέριξ τοῦ σημείου $w=0$ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν εἰς τὸ ἄνω ἡμιεπίπεδον ἓνα ἡμικυκλικὸν τόξον πολὺ μικρᾶς ἀκτίνος ρ , τότε ἀντιστοιχεῖ μία μετάβασις ἀπὸ τὴν πλευρὰν $A_2 A_1$ πρὸς τὴν πλευρὰν $A_1 A_3$. Οὕτω ἡ μεταβολὴ τοῦ z εἶναι:

$$\Delta z = i h$$

Ἐξ ἄλλου εἰς τὸν τύπον (2) θέτοντες $\eta = \rho \cdot e^{i\varphi}$ καὶ λαμβάνοντες τὸ ὅριον καθὼς τὸ $\rho \rightarrow 0$, λαμβάνομεν:

$$\Delta z = i C \cdot \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\pi (1 + \rho e^{i\varphi})^a d\varphi = i \pi C$$

Ἐντεῦθεν $C = \frac{h}{\pi}$ καὶ ἡ τελικὴ ἔκφρασις τοῦ ὁλοκληρώματος (2) θά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$z = \frac{h}{\pi} \cdot \int_{-1}^w \eta^{-1} (1+\eta)^a d\eta + ih \quad (3)$$

Ἡ συνάρτησις $\eta = e^{nw}$ ὁρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τῆς λωρίδος $0 < \Im w < 1$ τοῦ w -ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου τοῦ z -ἐπιπέδου.

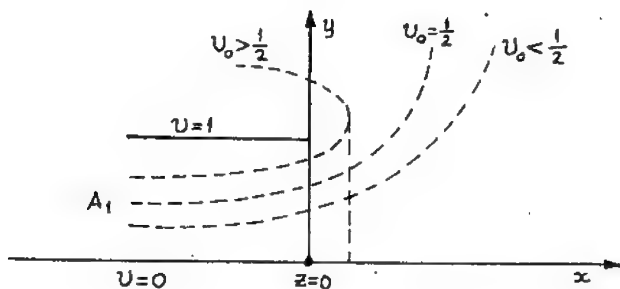
Ὅθεν, ἡ συνάρτησις:

$$z = \frac{h}{\pi} \cdot \int_{-1}^{e^{nw}} \eta^{-1} (1+\eta)^a d\eta \quad (4)$$

ὁρίζει μίαν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τῆς λωρίδος $0 < \Im w < 1$ τοῦ w -ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ γραμμοσυσταθέντος χωρίου τοῦ z -ἐπιπέδου. Εἰς τὴν πορείαν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $\Im w = 0$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ κατωτμῆμα τοῦ πυκνωτοῦ $A_1 A_2$ καὶ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $\Im w = 1$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἄνω τμῆμα τοῦ πυκνωτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ $A_2 A_3 A_1$. Ἐν τῇ σχέσει (4) διὰ $v = \Im w = \text{σταθ.}$ λαμβάνομεν τὰς παραμετριάς ἐξισώσεις τῶν δυναμικῶν γραμμῶν τοῦ δοθέντος ἡλεκτροστατιτικοῦ πεδίου π.χ. εἰς τὴν εἰδικὴν

περίπτωση όπου $\alpha=1$ το όλομήρωμα (4) δύναται να υπολογισθῇ μέ τήν βοήθειαν στοιχειωδῶν συναρτήσεων καί δίδει :

$$z = \frac{h}{\pi} (1 + \pi w + e^{\pi w})$$



Σχ. 3

Τότε αἱ παραμετρικαί ἑξισώσεις τῶν ἰσοδυναμιῶν γραμμῶν $v=v_0=\text{const.}$ ($0 \leq v_0 \leq 1$) λαμβάνουν τήν μορφήν :

$$x = \frac{h}{\pi} (1 + \pi u + \sin \pi v_0 \cdot e^{\pi u})$$

$$y = \frac{h}{\pi} (\pi v_0 + \pi \cos \pi v_0 \cdot e^{\pi u}) \quad -\infty < u < +\infty$$

Εἰδικῶς, τῆς μέσης ἰσοδυναμιῆς γραμμῆς ($v_0 = \frac{1}{2}$) ἡ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς :

$$y = \frac{h}{2} + \frac{h}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi}{2} \cdot x - 1}$$

Ἰσοδυναμιαί γραμμαί ἀντιστοιχοῦσι εἰς τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ v δίδονται ὑπὸ τοῦ Σχ. 3.

Παρατήρησις. Γενικῶς ἡ μέθοδος τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως χρησιμοποιεῖται εἰς τήν σχεδίασιν τῶν δύο διαστάσεων ἡλεκτροστατικῶν καί μαγνητοστατικῶν πεδίων.

§ 4. ΜΕΤΑΔΟΣΙΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΟΣ

Θεωροῦμεν ἓνα στερεόν τῷ ὁποῖον ἔχει θερμουργασίαν ἢ ὁποῖα μεταβάλλεται μετά τοῦ χρόνου. Συχνά μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ ποσότης τῆς θερμότητος (εἰς μονάδας calories) τῆς διοχετευομένης ἀνά μονάδα ἐμβαδοῦ (1 cm^2) καί ἀνά μονάδα χρόνου (1 sec) διὰ μέσου μιᾶς ἐπιφανείας τοποθετημένης ἐντός τοῦ στερεοῦ. Αὕτῃ ἡ ποσότης συγχρόνως καλεῖται μετάδοσις θερμότητος διὰ μέσου τῆς

επιφανείας, συμβολίζεται διά του Q και είναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας $T(x,y,z)$ τῆς ἐπιφανείας. Δίδεται δὲ αὕτη ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$Q = -k \operatorname{grad} T \quad (1)$$

ὅπου k εἶναι μία σταθερὰ καὶ ἡ ὁποία καλεῖται συντελεστὴς θερμοαγωγιμότητος ἐξαρτῶμενος ἐν τῇ ὑλῇ τοῦ στερεοῦ.

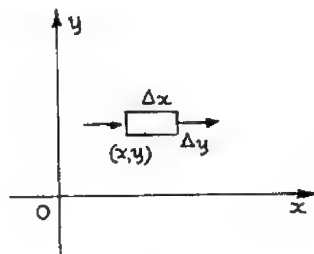
Ἐάν περιορίσωμεν τὸ πρόβλημά μας καὶ ἐδῶ εἰς τὸν χώρον τῶν δύο διαστάσεων (μικαδιδιὸν ἐπίπεδον), τότε ὁ τύπος (1) γράφεται :

$$Q = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + i \frac{\partial T}{\partial y} \right) = Q_x + i Q_y \quad (2)$$

ὅπου

$$Q_x = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q_y = -k \cdot \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Θεωροῦμεν τώρα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς στερεοῦ ἓνα στοιχεῖον ἔχον τὸ σχῆμα ἑνὸς ὀρθογωνίου πρίσματος μὲ μοναδιαῖον ὕψος καθεστὸν εἰς τὸ ἐπίπεδον xy μὲ βάσεις $\Delta x, \Delta y$ εἰς αὐτὸ τὸ ἐπίπεδον (βλ. Σχ. 1).



Σχ. 1

Ἡ φορά τοῦ μέτρου τῆς μεταδόσεως τῆς θερμότητος πρὸς τὰ δεξιὰ διὰ μέσου τῆς ἀριστερᾶς ὀψεως τῆς πλευρᾶς εἶναι $-k \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Delta y$ καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ διὰ μέσου τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς εἶναι $-k \frac{\partial T(x+\Delta x,y)}{\partial x} \Delta y$.

Ἀφαιροῦντες τὸ πρῶτον μέτρον ἀπὸ τὸ δεῦτερον εὐρίσκουμεν τὸ μέτρον τῆς ἀπωλείας τῆς θερμότητος ἀπὸ τὸ στοιχεῖον διὰ μέσου τῶν δύο ὀψεων. Οὕτω

$$-k \frac{\partial T(x+\Delta x,y)}{\partial x} \Delta y - \left(-k \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Delta y \right) = -k \left[\frac{T_x(x+\Delta x,y) - T_x(x,y)}{\Delta x} \right] \cdot \Delta x \Delta y$$

Παραλείποντες τὰ διαφορικά ἀνωτέρας τάξεως θεωροῦντες τὰ $\Delta x, \Delta y$ πολὺ μικρὰ ἢ ἀνωτέρω ἔμφρασις γράφεται :

$$-k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \quad (3)$$

Κατὰ ἓναν ἀνάλογον τρόπον τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος ποῦ ἀπόλλυται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς θερμότητος ἐν τῇ ἄνω πρὸς τὴν κατω ὀψιν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἐν τῇ κατω ὀψει πρὸς τὰ ἔξω δά εἶναι :

$$-k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

Θερμότητα ἐγυλίζει ἢ ἐλευθερώνει τὸ στοιχεῖον μόνον διὰ μέσου αὐτῶν τῶν τεσσάρων ὅψεων καὶ ἡ θερμουργασία ἐντὸς τοῦ στοιχείου εἶναι σταθερά.

Ἐντεῦθεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμφράσεων (3) καὶ (4) πρέπει νὰ εἶναι μηδέν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

Οὕτω ἡ συνάρτησις $T(x,y)$ ἡ δίδουσα τὴν θερμουργασίαν τοῦ στερεοῦ πληροῖ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace. Μὲ ἄλλους λόγους ἡ συνάρτησις $T(x,y)$ εἶναι μία ἁρμονικὴ συνάρτησις τῶν x καὶ y εἰς τὸ πεδίου ποῦ παριστᾷ τὴν τομὴν τοῦ στερεοῦ σώματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου oxy .

Ἡ ἐξίσωσις $T(x,y) = C_1$, ὅπου C_1 πραγματικὴ σταθερά, εἰς τὸν χώρον oxy παριστᾷ μίαν οἰμογένεια κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ισόθερμοι ἐπιφάνειαι*, ἐνῶ εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy παριστᾷ μίαν οἰμογένειαν καμπύλων, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ισόθερμοι γραμμαί*.

Ἐστω $\psi(x,y)$ ἡ συδυγὴς ἁρμονικὴ τῆς συναρτήσεως $T(x,y)$. Θεωροῦμεν ἥδη τὴν μιγαδικὴν συνάρτησιν:

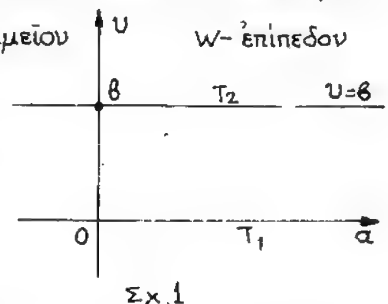
$$\Omega(z) = T(x,y) + i\psi(x,y) \quad (6)$$

ἡ ὁποία καλεῖται *μιγαδικὴ θερμουργασία*.

Ἡ δὲ καμπύλη $\psi(x,y) = C_2$, ὅπου C_2 πραγματικὴ σταθερά καλεῖται *γραμμὴ ροῆς*.

Μία ἐνδιαφέρουσα ἀπλὴ περίπτωση πού θά χρησιμοποιεῖται εἰς τὰς ἐφαρμογὰς εἶναι ἡ τῆς εὐρέσεως τῆς θερμουργασίας εἰς καθεστῆμα περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων πλαιῶν ἔχουσιν σταθερὰς θερμουργασίας T_1 καὶ T_2 ($T_2 > T_1$) (βλ. Σχ.1). Θὰ ἔχωμεν εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὅτι:

$$T(u) = T_1 + \frac{1}{b} (T_2 - T_1)$$

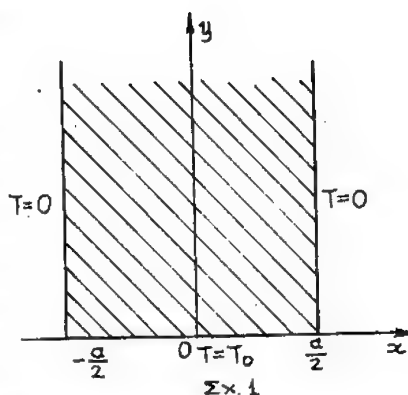


Ἐφαρμογή: Νὰ εὐρεθῇ ἡ κατανομή τῆς θερμουργασίας εἰς τὴν ἡμι-κυλινδρική ἀπείρου μήκους τὴν δεικνυμένην εἰς τὸ Σχ.1 τῆς ὁποίας τὸ πλάτος

είναι α υαί τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἔχουν θερμωρασίαν $T=0$, ἐνῶ ὁ πυθμὴν αὐτῆς ἔχει θερμωρασίαν T_0 .

Λύσις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ 1^{ου} παραδείγματος τῆς § 4 τοῦ Σ κεφαλαίου εὐνόλως διαπιστοῦται, ὅτι ὁ μετασχηματισμός ποῦ ἀπεικονίσει τὴν ἀνωτέρω λωρίδα εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ w -ἐπιπέδου ($\Im w > 0$) εἶναι ὁ $w = \eta \mu \frac{\pi z}{a}$ μετὰ τὰς πλευράς τῆς πλάυας ἀπεικονιζομένης εἰς τὰ διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, \infty)$ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος.

Ἄρκει νὰ εὕρωμεν τὴν θερμωρασίαν ἐπὶ τοῦ w -ἐπιπέδου γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ἐπὶ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος u ἔχομεν τὰς κάτωθι τιμὰς: Διὰ $u < -1$ εἶναι $T=0$, διὰ $-1 \leq u \leq +1$ εἶναι $T=T_0$ καὶ διὰ $u > 1$ εἶναι $T=0$. Πρὸς τοῦτοις θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα XI-2-2, ὅτε ἔχομεν:



$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u}{(\xi-u)^2 + u^2} d\xi = \frac{T_0}{\pi} \left(\tau o \xi \epsilon \varphi \frac{1-u}{u} - \tau o \xi \epsilon \varphi \frac{-1-u}{u} \right) \\ = \frac{T_0}{\pi} \left(\tau o \xi \sigma \varphi \frac{u-1}{u} - \tau o \xi \sigma \varphi \frac{u+1}{u} \right) = \frac{T_0}{\pi} \tau o \xi \epsilon \varphi \frac{w-1}{w+1} = \frac{2T_0}{\pi} \tau o \xi \epsilon \varphi \frac{\sinh \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a}}$$

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

1. Ἐπὶ τῆς ροῆς τῶν ρευστῶν.

1. α) Νὰ εὕρεθῇ τὸ μιγαδικὸν δυναμιὸν διὰ ἓνα ρευστὸν κινούμενον μετὰ μίαν σταθερὰν ταχύτητα V_0 κατὰ μίαν διεύθυνσιν, ἥ ὁποία σχηματίζει μίαν γωνίαν ω μετὰ τὸν θετικοῦ ἄξονα τῶν x .
- β) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ δυναμιὸν τῆς ταχύτητος καθὼς καὶ ἡ συνάρτησις ρεύματος.
- γ) Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ρευματινῶν καὶ ἰσοδυναμιῶν γραμμῶν.
2. Νὰ διερευνηθῇ ἡ κίνησις ἑνὸς ρευστοῦ ἔχοντος μιγαδικὸν δυναμιὸν $\Omega(z) = iK \log z$, ὅπου $K > 0$.

3. Αναλύστε την ροή, η οποία δίδεται υπό του υατώδι μιγαδιου δύναμικου δηλ. σχεδιάσατε την ταχύτητα του πεδίου τας ισοδυναμιας και ρευματιυας γραμ-
μας τας πηγας, τους στροβίλους κ.τ.λ.

i) $\Omega(z) = \log(z^2 - a^2)$ ($a > 0$) ii) $\Omega(z) = \log \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}$ ($a > 0$)

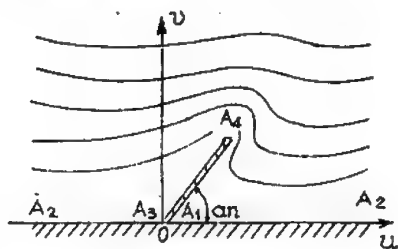
iii) $\Omega(z) = \log(1 + \frac{1}{z^2})$ iv) $\Omega(z) = az + \frac{k}{2\pi i} \log z$ ($a > 0, k > 0$).

4. Δείξατε ότι η απειυόνισις :

$$W = (z-1)^a \cdot (1 + \frac{az}{1-a})^{1-a}$$

απειυόνισει τώ άνω ήμιεπιπέδον ή μη $z > 0$ επί του άνω ήμιεπιπέδου ή μη $w > 0$, έφ' όσον απουόψωμεν έυ του W ένα ευθύγραμμον τμήμα που ένάνει τα σημεία 0 και $e^{i\alpha\pi}$ (βλ. Σχ.1).

Διά χρησημοποιήσεως του άνωτέρω απο-
τελέσματος νά εύρεθι η ροή του ρευστου
έντός μιās άπειρας βαθειās δεξαμενής
έχούσης τώ έναντι σχήμα, όπου συγχρόνως τώ τμήμα $A_3 A_4$ παριστά
τώ άντιυείμενον μήνους h .



Σχ.1

5. Ροή περίξ μιās γωνίας

Όταν τώ μιγαδιόν δύναμικόν είναι η συνάρτησις :

$$\Omega(z) = Az \quad (1), \quad (z = x + iy)$$

όπου A πραγματιυή σταθερά, τότε θα έχωμεν :

$$\Phi(x,y) = Ax, \quad \Psi(x,y) = Ay$$

Αί ρευματιυαί γραμμαι $\Psi(x,y) = C$ είναι αί όριδόντιοι γραμμαι $y = \frac{C}{A}$,
ένω η ταχύτης εις υάδε σημείον είναι $V = \overline{\Omega'(z)} = A$.

Έδω ένα σημείον (x_0, y_0) μέ $\Psi(x,y) = 0$ είναι υάδε σημείον του πραγματι-
υου άξονος τών x .

Εάν τώ σημείον (x_0, y_0) ληφθι ως άρχή, τότε η $\Psi(x,y)$ παριστά την μορφήν
της ροής μέσω υάποιας υαμπύλης καρασομένης από την άρχήν πρός
τώ σημείον (x,y) (βλ. Σχ.2). Η ροή είναι όμιαλή πρός τώ δεξιά.

Αυτή δύναται νά ἐρμηνευθῇ ὡς ἡ ὁμαλὴ ροή εἰς τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἡμιεπιπέδου φρασσομένου ὑπὸ τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος τῶν x ἢ ὡς ἡ ὁμαλὴ ροή μεταξύ δύο παραλλήλων γραμμῶν $y=y_1$ καὶ $y=y_2$.

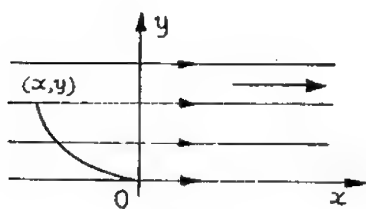
Ἦδη ζητοῦμεν νά προσδιορίσωμεν τὴν ροὴν ἐντὸς τοῦ τεταρτημορίου $u \geq 0, v \geq 0$. Πρὸς τούτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ μετασχηματισμός $z=w^2$ ἀπεικονίζει αὐτὸ τὸ τεταρτημόριον ἐντὸς τοῦ ἄνω μέρους τοῦ ἐπιπέδου xy , τὸ δὲ σύνορον αὐτοῦ τοῦ τεταρτημορίου ἐξ' ὁλοκληροῦ τοῦ ἄξονος τῶν x . Ἐπειδὴ $y=2uv$ ἡ ρευματικὴ συνάρτησις $\Psi(x,y)=Ay$ διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς τοῦ ἄνω ἡμιεπιπέδου ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ρευματικὴν συνάρτησιν $\Psi(u,v)=2Auv$ διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς τοῦ ἄνω τεταρτημορίου. Αὕτῃ ἡ συνάρτησις δύναται νά εἶναι ἁρμονικὴ καὶ μηδενίζεται ἐπὶ τοῦ συνόρου του. Αἱ ρευματικαὶ γραμμαὶ εἰς τὸ θεωρηθὲν τεταρτημόριον εἶναι υἱάδος ὑπερβολῶν (βλ. Σχ.3), ἥτοι: $2Auv=C$.

Τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν εἶναι ἡ συνάρτησις $\Omega(w)=Aw^2$ καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ρευστοῦ εἶναι:

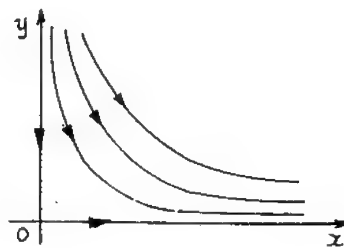
$$V = \overline{\Omega'(w)} = 2A(u-iv),$$

Τὸ δὲ μέτρον τῆς ταχύτητος εἶναι:

$$|V| = 2A\sqrt{u^2+v^2}$$



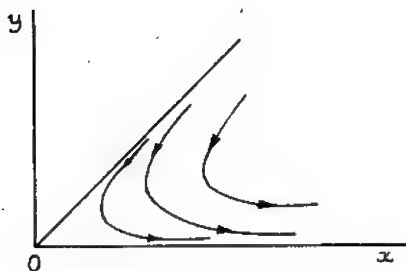
Σχ.2



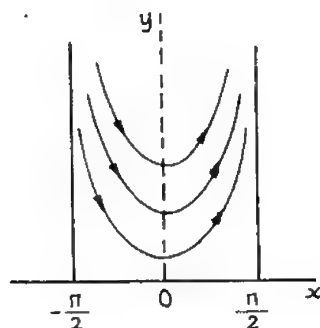
Σχ.3

6. Νά εὐρεθῇ τὸ μιγαδικὸν δυναμικὸν τῆς ροῆς περὶ ἑνὸς κυλίνδρου $z=z_0$, ὅταν ἡ ταχύτης V τείνῃ πρὸς μίαν πραγματικὴν σταθερὰν καθὼς τὸ σημεῖον ἀπομακρύνεται τοῦ κυλίνδρου.
7. Νά εὐρεθῇ ἡ ρευματικὴ συνάρτησις $\Psi(z,\theta)=A z^4 \eta \mu 4\theta$ διὰ μίαν ροὴν ἐντὸς

του γωνιαίου τομέως $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ και ακολουθώντας να χαραχθούν μία ή δύο ρευματιναί γραμμαί εις τό έσωτεριόν αυτού του χωρίου (βλ. Σχ.4).



Σχ.4

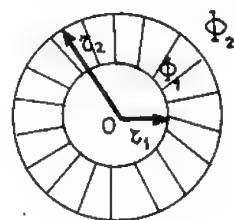


Σχ.5

8. Θεωρούμεν μίαν ροήν πραγματοποιουμένην εντός του ήμι-απείρου χωρίου $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y \geq 0$ (βλ. Σχ.5). Δείξτε ότι τό μιγαδικόν δυναμιόν αυτής τής ροής είναι $\Omega(z) = A \eta \mu z$. Ακολουθώντας εύρατε τας εξισώσεις των ρευματινών γραμμών.

II. Επί του στατιου ήλειτουργιού

9. Ένα χωρίον φράσσεται υπό δύο άπείρου μήνους όμοιέντρων υλινδρικών πυκνωτών, άμτινών τ_1 και τ_2 ($\tau_2 > \tau_1$), οι όποιοι είναι φορτισμένοι μέ δυναμια Φ_1 και Φ_2 αντίστοιχως. Νά εύρεθούν: α) Τό δυναμιόν β) Η ένταση του ήλειτουργιού πεδίου εις υάθε σημείον του χωρίου.
Υπόδ: Η δυναμική συνάρτησις θα είναι τής μορφής $\Phi = A \log r + B$, όπου A και B σταθεραί προσδιορίζόμεναι από την εξίσωσιν του Laplace κ.τ.λ. (βλ. Σχ.6).

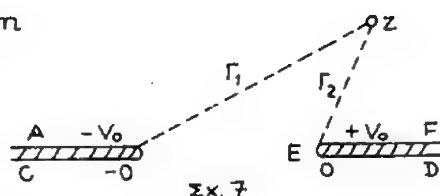


Σχ.6

10. Δείξτε ότι τό μιγαδικόν δυναμιόν του ήλειτουργιού πεδίου του παραγομένου υπό δύο συσσωρευτών ών δεικνυομένων εις τό Σχ.7 συνιστωμένων υπό δύο συνεπιπέδων πλαιών εύρισκομένων εις απόστασιν $2a$ και

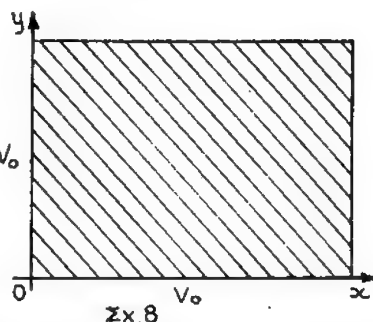
ἔχουσιν ἢ μία δυναμιὸν V καὶ ἢ ἄλλη δυναμιὸν $-V$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Omega(z) = \frac{2V}{\pi} \log(z + \sqrt{z^2 - a^2})$$

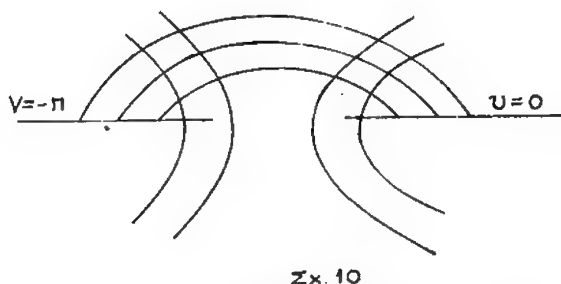
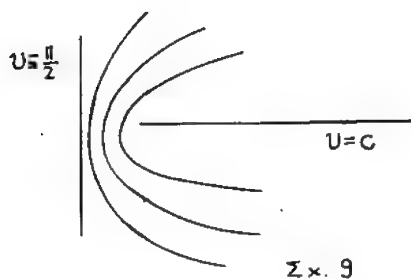


11. Νά εὑρεθῇ: α) Τό δυναμιὸν, β) Τό ἡλεκτρι-
κὸν πεδίον παντοῦ εἰς τὸ γραμμοσταθρὲν
χωρίον τοῦ Σx. 8, ἐὰν τὸ δυναμιὸν ἐπὶ τῶν
θετικῶν ἡμισφαιρίων x καὶ y εἶναι ἀντιστοι-
χῶς V_0 καὶ $-V_0$.

(Ἀπάντ: $V_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} \right) \right\}$).



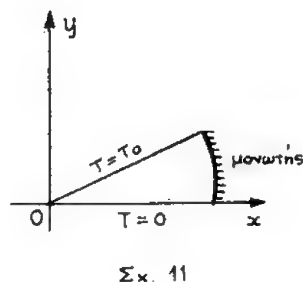
12. Νά εὑρεθῇ τὸ ἡλεκτροστατικὸν δυναμιὸν μεταξὺ δύο ἡμι-απείρων καθετῶν
πλαισίων χωρισμένων ὑπὸ ἐνὸς ἀνοίγματος ὡς δεικνύει τὸ Σx. 9.



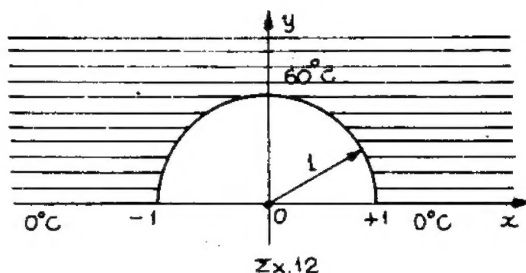
13. Νά εὑρεθῇ τὸ ἡλεκτροστατικὸν δυναμιὸν δύο ἡμι-απείρων συνεπιπέδων συσσω-
ρευτῶν, οἱ ὅποιοι εὐρίσκονται εἰς μίαν ἀπόστασιν μεταξὺ των ὡς δεικνύει τὸ
Σx. 10.

III. Ἐπὶ τῆς θερμότητος :

14. Διὰ ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ $w = \log z$
νά εὑρεθῇ ἡ κατανομή τῆς θερμοκρασίας
εἰς τὸν κυκλικὸν τομέαν πού δεικνύεται εἰς
τὸ ἔναντι Σx. 11. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἰσοθερ-
μοὶ γραμμαὶ τῆς ροῆς καὶ νά χαραχθῇ μία
ἐξ αὐτῶν.

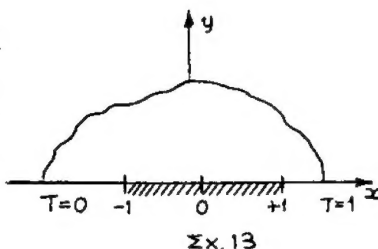


15. Νά εὑρεθῇ ἡ μόνιμος κατάσταση τῆς θερμοκρασίας εἰς τὸ σημεῖον τοῦ γραμμικοσυσθέντος χωρίου τοῦ Σχ. 12, ἐάν ἡ θερμοκρασία ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι 60°C , ἐνῶ εἰς τὰ τμήματα $(-\infty, -1]$ καὶ $[1, +\infty)$ τοῦ ἁξονος τῶν x εἶναι 0°C .



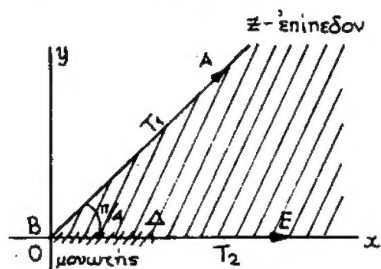
Ἱπόδο: Χρησιμοποιήσατε τὸν μετασχηματισμόν $w = z + \frac{1}{z}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τὸ θεώρημα τοῦ Dirichlet διὰ τὴν εὑρεσιν τῆς συναρτήσεως $T(x,y)$.

16. Νά εὑρεθοῦν οἱ φραγμένες μόνιμες θερμοκρασίες $T(x,y)$ εἰς ἓνα ἡμι-ἄπειρον στερεόν $y \geq 0$, ἐάν $T=0$ εἰς τὸ τμήμα $x < -1, y=0$ τοῦ συνόρου, ἐάν $T=1$ εἰς τὸ τμήμα $x > 1, y=0$ καὶ ἐάν τὸ τμήμα $-1 < x < 1, y=0$ τοῦ συνόρου εἶναι μονωμένο.

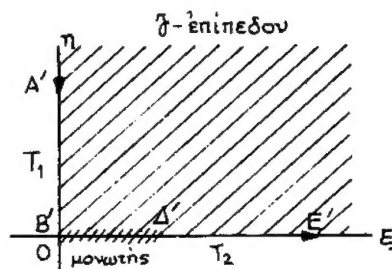


(Ἀπάντι: $T(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right], -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} t \leq \frac{\pi}{2}$).

17. Μία ἄπειρος σφήνα τῆς ὁποίας ἡ τομή παρίσταται ὑπὸ τοῦ γραμμικοσυσθέντος χωρίου ABDE,



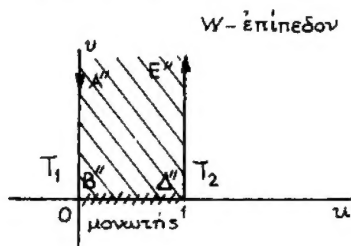
Σχ. 14 (α)



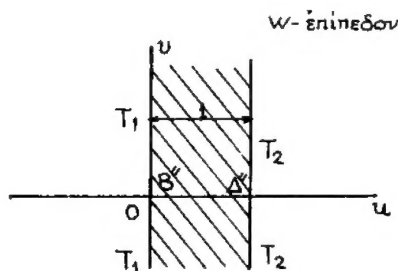
Σχ. 14 (β)

γωνίας $\frac{\pi}{4}$ (βλ. Σχ. 14 (α)) ἔχει μίαν τῶν πλευρῶν τῆς (AB) διατηροῦσα σταθεράν θερμοκρασίαν T_1 . Ἡ ἄλλη πλευρὰ BDE ἔχει τὸ τμήμα BD

(μοναδιαίου μήκους) εἰς μόνωσιν, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τμήμα ΔΕ διατηρὸν σταθεράν θερμουργασίαν T_2 . Ἡ εὐρεθὴ ἢ θερμουργασία εἰς τὰδε σημείον τοῦ χωρίου.



Σχ. 14(γ)



Σχ. 14(δ)

Λύσις: Διὰ ἐυτελέσεως τοῦ μετασχηματισμοῦ $\eta = z^2$ τὸ γραμμοσυστασθέν χωρίον τοῦ z -ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 14(α)) ἀπεικονίζεται ἐντὸς τοῦ γραμμοσυστασθέντος χωρίου τοῦ η -ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 14(β)), ὅπου ἡ πλευρά ΑΒ ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος η , ἡ δὲ ΒΕ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ξ τοῦ η -ἐπιπέδου.

Ἀπολογουδως ἐυτελοῦντες τὸν μετασχηματισμόν $\eta = \eta(\frac{\pi w}{2})$ τὸ γραμμοσυστασθέν χωρίον τοῦ η -ἐπιπέδου ἀπεικονίζεται εἰς τὸ γραμμοσυστασθέν χωρίον τοῦ w -ἐπιπέδου (βλ. Σχ. 14(γ)), τὰ δὲ σύνορα τῶν ἀνωτέρω χωρίων ἀπεικονίζονται ὅπως δεικνύεται εἰς τὰ ἀνωτέρω σχήματα.

Ἡδη τὸ πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῆς θερμουργασίας εἰς τὸ χωρίον τὸ δεικνυόμενον ὑπὸ τοῦ Σχ. 14(γ) μετὰ τὴν πλευρὰν Β''Δ'' εὐρισκομένην εἰς μόνωσιν ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῆς θερμουργασίας εἰς τὸ χωρίον τὸ δεικνυόμενον ὑπὸ τοῦ Σχ. 14(δ), ἐπειδὴ λόγῳ τῆς συμμετρίας δὲν δύναται νὰ μεταφερθῇ θερμότης διὰ μέσου τῆς πλευρᾶς Β''Δ''. Οὕτω ἔχομεν ἀναχθῇ εἰς τὸ πρόβλημα τῆς εὐρέσεως τῆς θερμουργασίας μεταξὺ δύο παραλλήλων πλαγιῶν εὐρισκομένων εἰς σταθεράν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν καὶ ἔχουσιν θερμουργασίας T_1 καὶ T_2 . Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ μεταβολὴ τῆς θερμουργασίας εἶναι γραμμικὴ καὶ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως: $T = T_1 + (T_2 - T_1)u$.

Ἀπὸ τοὺς τύπους τῶν μετασχηματισμῶν $\eta = u^2$ καὶ $\eta = \eta(\frac{\pi w}{2})$ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ η εὐρίσκομεν $w = \frac{2}{\pi} \text{τοξ} \eta \pi z^2$ ἢ $u = \frac{2}{\pi} \cdot \text{Re} \{ \text{τοξ} \eta \pi z^2 \}$.

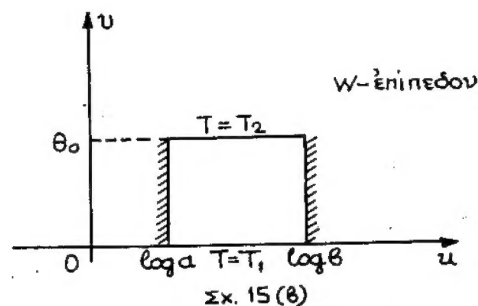
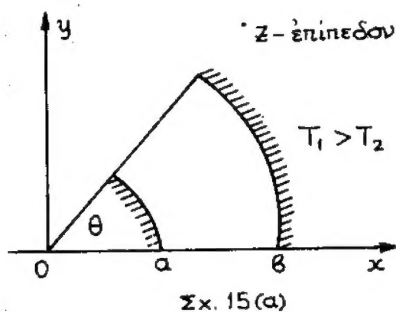
Οὕτω ἡ ἑπτομένη θερμοκρασία εἶναι:

$$T(x,y) = T_1 + \frac{2 \cdot (T_2 - T_1)}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{toxi} \eta \mu z^2 \right\}$$

Ἐάν δέ λάβωμεν πολυδιάς συντεταγμένας θά ἔχωμεν:

$$T(\tau, \theta) = T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \operatorname{toxi} \eta \mu \left\{ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\tau^4 + 2\tau^2 \sin 2\theta + 1} - \frac{1}{2} \sqrt{\tau^4 - 2\tau^2 \sin 2\theta + 1} \right\}.$$

8. Νά εὑρεθῇ ἡ κατανομή τῆς θερμοκρασίας $T(x,y)$ ἐντός τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ δεικνυομένου εἰς τὸ Σχ. 15 (α), τὸ ὁποῖον εἶναι μονωμένον ἐπὶ τῶν δύο κυκλικῶν τοῦ τόξων αὐτίνων α καὶ β , ἐνῶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τῆς μεμένης ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει σταθερὰν θερμοκρασίαν T_1 , ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης τοῦ πλευρᾶς τοῦ ἔχει σταθερὰν θερμοκρασίαν T_2 .



Υπόδ: Ἐτελέσατε τὸν μετασχηματισμὸν $w = \log z$, ὅποτε τὸ δοθέν χωρίον μετασχηματίζεται εἰς τὸ χωρίον τὸ δεικνυόμενον ὑπὸ τοῦ Σχ. 15 (β). ὑ.τ.λ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. AHLFORS, L. : Complex Analysis. Mc Graw-Hill, N. York, 1966
2. BASS, J. : Cours de Mathématiques. Tome I-II, Masson, Paris, 1968
3. CARSLAW, H.-JAEGER, J. : Operational Methods in Applied Mathematics, Dover, 1963
4. CHURCHILL, R.-BROWN, J.-VERHEY, R. : Complex Variables and Applications, Mc Graw-Hill, N.York-London, 1974
5. DETTMAN, J. : Applied Complex Variables, MacMillan Company, 1969
6. KAPLAN, W. : Advanced Calculus, Addison-Wesley, 1959
7. ΚΑΗΗΟΥ, Α. : Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων, Αθήνα, 1963
8. KRZYZ, J. : Problems in Complex Variable Theory. American Elsevier, N. York, 1971
9. LEPAGE, W. : Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. Mc Graw-Hill, 1961.
10. PHILLIPS, E. : Some Topics in Complex Analysis. Pergamon Press, 1966
11. PIPES, L.-HARVILL, L. : Applied Mathematics for Engineers and Physicists. Mc Graw-Hill, London, 1970
12. PISOT, Ch.-ZAMANSKY, M. : Mathématiques Générales. Tome 5, Dunod, Paris
13. SAKS, S.-ZYGmund, A. : Analytic Functions, Elsevier Publishing Company, 1971
14. SANSONE, G.-GERRETSEN, J. : Lectures on the theory of Functions of a complex variable. Tome I-II, Wolters - Noordhoff, 1969
15. SILVERMAN, R. : Complex Analysis with Applications, Prentice-Hall, 1974
16. SPIEGEL, M. : Complex Variables, Mc Graw-Hill
17. SVESHNIKOV, A.-TIKHONOV, A. : The theory of Functions of a Complex Variable. MIR Publishers, Moscow, 1973
18. VOLKOVSKY, G.-ARAMANOVICH, I. : Problems in the theory of Functions of Complex Variable. MIR Publishers, Moscow, 1972

* * *